



NUKUS BRANCH OF TASHKENT UNIVERSITY OF
INFORMATION TECHNOLOGIES NAMED AFTER MUHAMMAD AL- KHWARIZMI

«МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЛЕСТИРИЙ ҲАМ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ
ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫҢ АКТУАЛ МАСЕЛЕЛЕРИ» ХАЛЫҚ АРАЛЫҚ
ИЛИМИЙ-ӘМЕЛИЙ КОНФЕРЕНЦИЯ

ТЕЗИСЛЕР ТОПЛАМЫ

Топлам №1

«МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА АХБОРОТ
ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИНГ ДОЛЗАРБ
МАСАЛАЛАРИ» ХАЛҚАРО ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН

ТЕЗИСЛАРИ ТЎПЛАМИ

Тўплам №1

ABSTRACTS

OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE
«ACTUAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING AND
INFORMATION TECHNOLOGY»

Volume №1

ТЕЗИСЫ

МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

Том №1

NUKUS, MAY 2-3, 2023



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

НУКУССКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-
ХОРАЗМИЙ

«МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЛЕСТИРИЎ ҲАМ ИНФОРМАЦИЯЛЫҚ
ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫҢ АКТУАЛ МАСЕЛЛЕЛЕРИ» ХАЛЫҚ АРАЛЫҚ
ИЛИМИЙ-ӘМЕЛИЙ КОНФЕРЕНЦИЯ

Т Е З И С Л Е Р Т О П Л А М Ы

НӨКИС 2-3 МАЙ, 2023

«МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА АХБОРОТ
ТЕХНОЛОГИЯЛАРИНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ» ХАЛҚАРО
ИЛМИЙ-АМАЛИЙ АНЖУМАН

Т Е З И С Л А Р И Т Ў П Л А М И

НУКУС 2-3 МАЙ, 2023

A B S T R A C T S

OF THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE
«ACTUAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING AND
INFORMATION TECHNOLOGY»

NUKUS 2-3 MAY, 2023

Т Е З И С Ы

МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

NUKUS, MAY 2-3, 2023.

Международная научно-практическая конференция «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий». – Нукус, Нукусский филиал ТУИТ имени Мухаммада аль-Хоразмий, 2023 г. Том №1 – 371 с.

Сборник содержит труды участников международной конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» и предназначен для студентов, магистров, докторантов, преподавателей ВУЗов, специалистов в области математики, прикладной математики и информационных технологий.

Редакционная коллегия:

Главный редактор	– профессор, д.э.н. Б.Ш. Махкамов
Заместители главного редактора	– профессор, д.т.н. Б.Т. Каипбергенов
Ответственные секретари	– профессор, д.т.н. К.А. Ташев
	– доцент, к.т.н. Б.Ш. Айтмуратов
	– доцент, д.т.н. Р.И. Отениязов

Члены редакционной коллегии:

Садуллаев Азимбай Садуллаевич, д.ф.-м.н., академик, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Фазилов Шавкат Хайруллаевич, д.т.н., профессор, НИИ Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

Шадиметов Холмат Махкамбаевич, д.ф.-м.н., профессор, Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Ашуров Равшан Раджабович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

Абдурахимов Бахтиёр Файзиевич, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Кабулов Анвар Васильевич, д.т.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Маматов Нарзулла Солиджанович, д.т.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан

Кудайбергенов Каримбай Кадирбергенович, д.ф.-м.н., профессор, Каракалпакское отделение Академия наук Республики Узбекистан, Нукус, Узбекистан

Отемуратов Байрам Пердебаевич, д.ф.-м.н., доцент, Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

Утебаев Даулетбай, д.ф.-м.н., доцент, Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

Бурханов Шаяхмет, к.-ф.м.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Абдалиева Гулистан, к.ф.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Сейтназаров Кууаныш, д.т.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Техническая редакция:

PhD, доцент	Х. Сейткамалов
PhD, доцент	Г. Джайков
PhD, доцент	А. Сеидуллаев
PhD, доцент	П. Нуримов
PhD, доцент	М. Артикбаев
к.ф.-м.н., доцент	А. Бекиев
PhD, доцент	А. Халкназаров
PhD, доцент	А. Алауатдинов

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатели

Махкамов Бахтиёр Шухратович, д.э.н., профессор, Ректор Ташкентского университета информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Каипбергенов Батырбек Тулепбергенович, д.т.н., профессор, Директор Нукусского филиала ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Сопредседатели

Ташев Комил Ахматович, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Айтмуратов Бахберген Шарипбаевич, к.т.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ

Отениязов Рашид Идирисович, д.т.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ

Члены организационного комитета

Сейткамалов Хайратдин, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Бурханов Шаяхмет, к.-ф.м.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Абдалиева Гулистан, к.ф.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Сейтназаров Кууаныш, д.т.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Абылова Гулбахар, д.п.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Файзуллаев Байрам, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Бердимбетов Тимур, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Турениязова Асия, к.ф.-м.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Арзуова Шаригул, к.э.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Алламуратов Шарапат, к.ф.-м.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Кутлимуратов Юсуп, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Кудайназарова Дилноза, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Джайков Гафур, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Алламбергенов Аймурза, к.и.н., доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Бабажанов Элмурад, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Сеидуллаев Абат, PhD, доцент, Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

Бегиров Бахадир, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Пиримбетов Азамат, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Артикбаев Махкам, PhD, доцент, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Ядгаров Шерзод, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Орынбаев Аймурат, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Калмуратов Бекбосын, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Сагидуллаев Нурсултан, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Жарылканов Бахтияр, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

Даулетназаров Жаксылык, Нукусский филиал ТУИТ, Нукус, Узбекистан

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель

Арипов Мерсаид Мирсиддинович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Члены программного комитета

Аюпов Шавкат Абдуллаевич, д.ф.-м.н., академик, Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

Камилов Мирзоян Мирзаахмедович, д.т.н., академик, НИИ Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

Юсупбеков Нодирбек Рустамбекович, д.т.н., академик, Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан

Алимов Шавкат Арифжанович, д.ф.-м.н., академик, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Садуллаев Азимбай Садуллаевич, д.ф.-м.н., академик, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Худайберганов Гулмирза, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Азамов Абдуллажан Азамович, д.ф.-м.н., академик, Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

Игамбердиев Хусан Закирович, д.т.н., академик, Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан

Марахимов Авазжон Рахимович, д.т.н., профессор, Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Бобомуродов Озод Жураевич, д.т.н., профессор, филиал Казанского федерального университета в Джизаке, Ташкент, Узбекистан

Жабборов Насридин Мирзоодилович, д.ф.-м.н., профессор, Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент

Фазилов Шавкат Хайруллаевич, д.т.н., профессор, НИИ Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

Миронов Валентин Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, Рязанский государственный радиотехнический университет, Рязан, Россия

Мирзаев Иброхим, д.ф.-м.н., профессор, Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Холмухаммедов Олимжон Рахимович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Хужаяров Бахтияр Хужаярович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Абдурахимов Бахтиёр Файзиевич, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Алоев Рахматулло Джураевич, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Ашуров Равшан Раджабович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

Кабулов Анвар Васильевич, д.т.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Равшанов Нормакмад, д.т.н., профессор, НИИ Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

Шадиметов Холмат Махкамбаевич, д.ф.-м.н., профессор, Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

Нормурадов Чори Бегалиевич, д.ф.-м.н., профессор, Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Зайнидинов Хакимжон Насиридинович, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Каримов Маджит Маликович, д.т.н., профессор, Агентства по оценке знаний и квалификаций при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Азимов Бахтиёр, д.т.н., профессор, НИИ Развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

Мухамедиева Дилноз Тулкуновна, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Холмухаммедов Олимжон Рахимович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Исмоилов Мирхалил, д.т.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент, Узбекистан

Имамназаров Холматжон Худайназарович, д.ф.-м.н., профессор, Институт вычислительной математики и математической геофизики, Новосибирск, Россия

Дхананжай Сингх, PhD, профессор, Hankuk University of Foreign Studies, Сеул, Корея

Фаязов Кудратилло Садридинович, д.ф.-м.н., профессор, Туринский политехнический университет в Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович, д.ф.-м.н., профессор, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Ташкенте, Ташкент, Узбекистан

Нишанов Акрам Хасанович, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Игнатъев Николай Александрович, д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Холмуродов Абдулхамид Эркинович, д.ф.-м.н., профессор, Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан

Маматов Нарзулла Солиджанович, д.т.н., профессор, Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан

Нуралиев Фахриддин Муродиллаевич, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Садуллаева Шахло Азимбаевна, д.т.н., профессор, Белорусско-Узбекский межотраслевой институт прикладных технических квалификаций, Ташкент, Узбекистан

Анарова Шахзода Аманбаевна, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Назирова Элмира Шодмонкуловна, д.т.н., профессор, Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан

Уринбаев Эркин, д.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Норматов Иброхим, д.ф.-м.н., доцент, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Кудайбергенов Каримбай Кадирбергенович, д.ф.-м.н., профессор, Каракалпакское отделение Академия наук Республики Узбекистан, Нукус, Узбекистан

Отемуратов Байрам Пердебаевич, д.ф.-м.н., доцент, Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

Пренов Барлыкбай Баракбаевич, д.ф.-м.н., доцент, Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

НАУЧНАЯ И ТВОРЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УТЕУЛИЕВА НИЕТБАЯ УТЕУЛИЕВИЧА



«Заслуженный деятель науки Республики Каракалпакстан», «Отличник народного образования Республики Каракалпакстан», доктор физико-математических наук, профессор Утеулиев Ниетбай Утеулиевич является крупнейшим ученым, широко известным специалистом в области математического моделирования и стохастической оптимизации эколого-экономических задач.

Утеулиев Ниетбай Утеулиевич родился 1 апреля 1953 года в Кунградском районе. В 1970 году он окончил среднюю школу №2 в Кунградском районе. В 1972 году он поступил на математический факультет Ташкентского государственного университета (ныне Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека), а в 1977 году окончил кафедру «Математический анализ» по специальности «Теория функций комплексного переменного».

Н.У. Утеулиев в 1977-1978 годах работал инженером-программистом в «Вычислительном центре» Статистического управления Республики Каракалпакстан.

В 1978-1982 годах работал лаборантом, затем преподавателем на кафедре «Вычислительной математики» Нукусского государственного университета. Н.У.Утеулиев был стажером - исследователем Киевского государственного университета в 1982-1984 гг.

В 1984-1987 гг. аспирантом Киевского государственного университета. В 1987 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Соотношения двойственности и условия оптимальности для некоторых задач стохастического программирования с операторными ограничениями» на Ученом совете Д068.18.10 при Киевском государственном университете имени Т.Г.Шевченко по специальности: 01.01.09 – «Математическая кибернетика». В 1988-1991 гг. - преподаватель кафедры вычислительной математики Нукусского государственного университета. В 1991-1992 гг. - доцент кафедры вычислительной математики Нукусского государственного университета.

1992-1995 гг. докторант Киевского государственного университета. В 1995 году защитил докторскую диссертацию на тему «Математические модели и методы структуризации водопользования в регионе со сложной экологической обстановкой» по специальности «Математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях» на учёном совете Д01.39.02 при Институте кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины.

Н.У.Утеулиев в 1993 году получил ученое звание доцента по специальности «Вычислительная математика», в 2006 году - ученое звание профессора по специальности «Информатика и информационные технологии».

Профессор Н.У.Утеулиев является автором более 220 научных и научно-методических работ в области математического моделирования и стохастической оптимизации эколого-экономических задач; математического моделирования, алгоритмизации и программирования; исследования и применения задач интегральной геометрии; исследования многокритериальных задач стохастического программирования. Из них 5 монографий и 15 учебных пособий, более 30 учебно-методических пособий. Под руководством проф. Н.У. Утеулиева 4 исследователя из Нукусского филиала ТУИТ и Каракалпакского государственного университета имени Бердаха защитили диссертации по специальностям: «физико-математические науки» и «технические науки» на степень доктора философии (PhD). Более 50 магистерских диссертаций было защищено в Каракалпакском государственном университете, Нукусском государственном педагогическом институте, ТУИТ и Нукусском филиале ТУИТ под руководством проф. Н.У.Утеулиева.

Н.У. Утеулиев является членом специализированных советов по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD) и доктора наук (DSc) и членом редакционной коллегии трех научных журналов:

- Член специализированного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 по присуждению ученых степеней в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека;
- Член специализированного совета DSc.03/26.05.2022.T.10.05 по присуждению ученых степеней в Ташкентском институте ирригации и инженеров механизации сельского хозяйства;
- Член научно-технического совета (НТС) по «Развитию информатизации и информационно-коммуникационных технологий» при Министерстве высшего образования, науки и инноваций;
- Член научно-технического совета (НТС) по Республике Каракалпакстан при Министерстве высшего образования, науки и инноваций;
- Научно-методический журнал «Наука и общество», издаваемый в Нукусском государственном педагогическом институте имени Ажинияза;
- Научно-практический электронный журнал «tecНика» Навоийского горного института;
- Журнал «Вестник» Каракалпакского государственного университета имени Бердаха

Организационный комитет

СЕКЦИЯ №1. АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ АЛГЕБРЫ, ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ

ASIMPTOTIKALÍQ DIFFERENTIALLANÍWSHÍ FUNKCIYALAR ALGEBRASÍ HAQQÍNDÁ

Abdireymov A. R.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti
e-mail: aabdireymov1001@gmail.com

Bul jumısta asimptotikalıq differensiallanıwshı funksiya algebrasınıń bazı bir qásiyetleri bayan etiledi. Dáslep asimptotikalıq limit túsiniń kiritemiz.

Meyli $E \subset \mathbb{R}$ Lebeg mánisinde ólsheli kóplik hám $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ólshewli funksiya bolsın. Bul f funksiyanıń $t_0 \in \mathbb{R}$ noqattaǵı joqarı hám tómengi asimptotikalıq limitleri sáykes turde tómendegishe anıqlanadı:

t_0 noqatında $\{f \leq a\}$ kópligi 1 tıǵızlıǵına iye bolatuǵın $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lardıń infimumı;

t_0 noqatında $\{f \geq a\}$ kópligi 1 tıǵızlıǵına iye bolatuǵın $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lardıń supremumı:

Olar ádette

$$ap - \limsup_{t \rightarrow t_0} f(t) \text{ hám } ap - \liminf_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

sıyaqlı belgilenedi. Eger bul eki mánis birdey bolsa, onda ol t_0 noqatta f funksiyanıń asimptotikalıq limiti delinedi hám $ap - \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ penen belgilenedi.

Joqarıda ayılǵanday, meyli $E \subset \mathbb{R}$ ólshewli kóplik, al $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ólshewli funksiya hám $t_0 \in E$ noqat bolsın. Eger tómendegi

$$f'_{ap}(t_0) := ap - \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

asimptotikalıq limit bar bolıp, ol shekli bolsa, onda ol t_0 noqatta f funksiyanıń asimptotikalıq tuwındısı delinedi hám funksiya t_0 de asimptotikalıq differenciallanıwshı delinedi.

$AD(0,1)$ kópligi dep barlıq $[f] \in S(0,1)$ klasslar kópligine aytamız, bunda f barlıq jerde asimptotikalıq differenciallanıwshı.

Meyli A kompleks sanlar maydanı $\mathbb{C}$ ústindegi algebra bolsın. A algebra da anıqlanǵan

$$x \rightarrow x^*$$

sáwlelendiriwi hár bir $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ushın

$$(x + y)^* = x^* + y^*;$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*;$$

$$(xy)^* = y^* x^*;$$

$$(x^*)^* = x.$$

shartlerdi qanaatlandirsa, onda bul sawlelendiriwge *involyuciya* dep ataladi. Involyuciyalı algebra *-algebra dep ataladi. A *-algebranın S úles algebrası ushın $x \in S$ ekenliginen $x^* \in S$ kelip shıqsa, onda S M -úles algebra dep ataladi.

Eki E hám F úles kóplikleriniń tıgızlanıw noqatı olardıń kesilisiwiniń tıgızlanıw noqatı bolǵanlıqtan, eki asimptotikalıq differenciallanıwshı funkciyalar qosındısı da kóbeymesi de asimptotikalıq differenciallanıwshı boladı. Bunnan $S(0;1)$ de $AD(0,1)$ *-úles algebra ekenligi kelip shıǵadı [1].

Teorema. $AD(0,1)$ *-algebra $S(0,1)$ algebranın menshik regulyar *-úles algebrası bolıp, $D(0,1)$ algebranı hám $L_\infty(0,1)$ diń barlıq proektorların óz ishine aladı.

ÁDEBIYATLAR

[1] Ber A. F., Kudaybergenov K. K., Sukochev F. A. Notes on derivations of Murray–von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 2020. V.279., 5, P. 108589. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108589>:

SIMMETRIK LEYBNITS ALGEBRALARI VA ULARNING XOSSALARI

Abdurashidov N. G', Eshtemirov E. S.

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti, Surxondaryo, O'zbekiston.

e-mail: abdurashidovnuriddin9550@gmail.com.

Leybnits algebralari Li algebralarining umumlashmasi hisoblanib, Li algebrasining ko'pgina natijalari Leybnits algebralariga ham tatbiq etiladi. Leybnits algebrasini o'rganish bilan bog'liq tadqiqotlarning ustuvor yo'nalishlaridan biri Li algebralari nazariyasida o'rinli bo'lgan xossa va natijalarni Leybnits algebralari uchun tekshirishdan iboratdir. Ta'kidlash joyizki, Leybnits ayniyatini qanoatlantiruvchi algebra birinchi bo'lib 1965 yilda A. Bloxning ishida D-algebralar nomi bilan kiritilgan edi, faqatgina J.L. Lode va T.Pirashvilining ishlaridan keyingina Leybnits algebralarining ahamiyati jadal suratda o'rganila boshlandi.

Ta'rif 1. $\mathbb{F}$ maydon ustida aniqlangan $\mathcal{L}$ algebraning ixtiyoriy x, y, z elementlari uchun quyidagi Leybnits ayniyati bajarilsa,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y] \quad (1)$$

$\mathcal{L}$ algebra Leybnits algebrası deyiladi, bu yerda $[-, -] - \mathcal{L}$ algebrada aniqlangan ko'paytirish amali.

Ta'kidlash joyizki ushbu ta'rifda keltirilgan algebra o'ng Leybnits algebrasidir. Eslatib o'tamiz, har qanday Leybnits algebra o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lib, o'ng Leybnits algebrası quyidagi xususiyatlarga ega :

$$[x, [y, y]] = 0, [x, [y, z]] + [x, [z, y]] = 0$$

(2)

O'ng Leybnits algebrasiga simmetrik bo'lgan chap Leybnits algebrasi va uning o'ziga xos xususiyatlari quyidagi Lemmada keltirilgan.

Lemma 1. $\mathbb{F}$ maydon ustida aniqlangan $\mathcal{L}$ o'ng Leybnits algebrasi berilgan bo'lib, unda quyidagi ayniyat o'rinli bo'lsin:

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]].$$

(3)

U holda quyidagi xossalar o'rinli.

i) $[[x, x], y] = 0,$

ii) $[[x, y], z] + [[y, x], z] = 0,$

iii) $[[x, y], z] + [z, [x, y]] = 0,$

iv) $[[y, z], x] = [[x, z], y] - [[x, y], z],$

v) $[[[a, b], c], d] = [[[d, c], a], b] - [[d, c], b], a] - [[[d, a], b], c] + [[d, b], a], c],$

vi) $2[[x, y], [x, y]] = 0.$

Ta'kidlash joizki, (1) va (2) shartni qanoatlantiruvchi algebralar simmetrik Leibniz algebralari deyiladi.

Ta'rif 2. Agar $(L, [-, -])$ Li algebrasida $\mu: L \otimes L \rightarrow L$ ko'paytma aniqlangan bo'lib, quyidagi ayniyatlar o'rinli bo'lsa, u holda (L, μ) juftlikka Simmetrik $\sum \mu$ - algebrasi deyiladi

i) $\mu(x, y) = \mu(y, x),$

ii) $\mu(x, \mu(y, z)) = 0 = \mu(\mu(x, y), z),$

iii) $\mu(x, [y, z]) = 0,$

iv) $[\mu(x, y), z] = 0.$

Tasdiq 1. $\mathcal{L}$ simmetrik Leybnits algebrasi bo'lsin. Quyidagilarni aniqlaymiz

$$2\{x, y\} = [x, y] - [y, x],$$

$$2xy = [x, y] + [y, x].$$

U holda $\mathcal{L}$ fazo $\{-, -\}$ va $\mu(x, y) = xy$ amallar bilan birgalikda Li $\sum \mu$ - algebrasidir.

Tasdiq 2. m Li $\sum \mu$ - algebra bo'lsin. Quyidagini keltiramiz

$$[x, y] = \{x, y\} + xy.$$

U holda $[-, -]$ ko'paytma m da simmetrik Leybnits algebra tuzilishini aniqlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

[1] Mamuka Jibladze, Teimuraz Pirashvili. "Lie theory for symmetric Leibniz algebras" Published online 05 October 2019. Springer.

[2] Jibladze, M., Pirashvili, T." Leibniz algebras and μ -groups". (In preparation). Springer, Berlin 1992.

[3] Ayupov Sh., Omirov B., Rakhimov I. Leibniz Algebras Structure and Classification, 2020 by Taylor & Francis Group, LLC.

[4] Loday J. L., Pirashvili, T. "Leibniz representations of Lie algebras". J.Algebra 181(2),414-425(1996).

BIR TENGLAMANING TUB SONLARDAGI YECHIMLARI HAQIDA

Allakov I., Muzropova N.S.

Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston
e-mail: iallakov@mail.ru, muzrapova_n@mail.ru

Ushbu

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3^2 = b$$

(1)

tenglamani qaraymiz. Bunda a_1, a_2, a_3, b -lar butun sonlar, p_j -lar esa tub sonlar. Tushunarliki, $a_j \neq 0$, ($j=1,2,3$) va $EKUB(a_1, a_2, a_3)=1$ deb olishimiz mumkin. Bundan tashqari Xuaning ishidagi Tarri muammosidagi singari ([1], 162b) (1) tenglama uchun kongruent yechimga ega bo'lishlik sharti bajariladi deb qaraymiz, ya'ni agar $N(q)$ ni

$$N(q) := \text{card} \left\{ (n_1, n_2, n_3) \mid 1 \leq n_j \leq q, (n_j, q) = 1, a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3^2 \equiv b \pmod{q} \right\} \quad (2)$$

tenglik bilan aniqlasak bu shartni "barcha $q \geq 1$ lar uchun $N(q) \geq 1$ bajariladi" ko'rinishida ifodalash mumkin. Faraz etaylik, a_1, a_2, a_3 lar (2) va $EKUB(a_1, a_2, a_3)=1$ shartlarni qanoatlantirsin hamda B ni $B := \max\{2, a_1, a_2, a_3\}$ tenglik bilan aniqlaymiz. Umumiylikni chegaralamagan B ning qiymati 34 dan kichik emas deb olish mumkin. $c_1, c_2, \dots$ lar effektiv, musbat o'zgarmas sonlar, δ yetarlicha kichik effektiv musbat son, uning qiymati c_j o'zgarmaslarning qiymatlariga bog'liq bo'lishi mumkin. Yetarlicha katta $N > 0$ butun soni uchun

$$Q := N^\delta, T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}, L := N B^{-1}, B \leq Q^\delta$$

deb olamiz.

Bu belgilashlardan foydalanib Ishning asosiy natijasini quyidagicha quyidagi teorema ko'rinishida yozishimiz mumkin:

Teorema. Agar a_1, a_2, a_3, b lar $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ va $EKUB(a_1, a_2, a_3)=1$ bo'lib barcha $q \geq 1$ uchun $N(q) \geq 1$ bo'lsa, u holda qiymatini hisoblash mumkin bo'lgan o'zgarmas $A > 0$ soni mavjud bo'lib quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

- agar a_1, a_2, a_3 larning barchasi musbat va $b \geq \max\{2, a_1, a_2, a_3\}^A$ bo'lsa, (1)-tenglama p_1, p_2, p_3 tub sonlarda yechimga ega bo'ladi;
- agar a_1, a_2, a_3 larning barchasi bir xil ishorali bo'lmasa va (1)-tenglama $3|b| + B^A$ dan katta bo'lmagan p_1, p_2, p_3 tub sonlarda yechimga ega bo'ladi.

Teorema isbotini sxematik ravishda bayon qilamiz. Isbotda [2] ishda foydalanilgan g'oyadan foydalanamiz. Ixtiyoriy y – haqiqiy soni va musbat soni

$$\text{uchun } e(y) := e^{2\pi i y} \text{ va } e_q(y) := y^{\frac{2\pi i y}{q}} = e\left(\frac{y}{q}\right);$$

$$S_j(y) := \sum_{L < n_j \leq N} \Lambda(n_j) e(n_j y), \quad j=1,2; \quad S_3(y) := \sum_{L < n_3 \leq N} \Lambda(n_3) e(n_3^2 y),$$

$$I(N) := \int_{\tau}^{1+\tau} e(-bx) S_1(a_1 x) S_2(a_2 x) S_3(a_3 x) dx$$

deb aniqlaymiz. Tushunarliki agar $I(N) > 0$ ekanligini ko'rsatsak, undan (1)-tenglamaning tub sonlarda yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. $\tau = T^{\frac{1}{4}} N^{-1}$ deb olamiz va $[\tau; 1+\tau]$ oraliqni quyidagicha ikki qismga ajratamiz: $1 \leq h \leq q \leq Q$, $EKUB(h, q) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi h va q lar uchun $m(h, q)$ bilan $\left[\frac{h-\tau}{q}, \frac{h+\tau}{q} \right]$ yopiq intervalni belgilaymiz. $m(h, q)$ ni katta yoylar deb ataymiz hamda $M = \bigcup_{\substack{1 \leq h \leq q \leq Q \\ EKUB(h, q) = 1}} m(h, q)$ va $M' = [\tau; 1+\tau] \setminus M$ deb olamiz.

$I(N)$ ni $M \cup M' = [\tau; 1+\tau]$ ekanligini e'tiborga olib quyidagicha ikkita integral yig'indisi ko'rinishida yozishimiz mumkin:

$$I(N) = \left(\int_M + \int_{M'} \right) e(-bx) \prod_{j=1}^3 S_j(a_j x) dx = I_1(N) + I_2(N) \quad (3)$$

(3) da $I_1(N)$ bilan M bo'yicha olingan integral $I_2(N)$ bilan esa M' bo'yicha olingan integral belgilangan.

Endi $I_2(N)$ integralni tekshiramiz. Avvalo quyidagi lemmalarni isbotlaymiz.

1-lemma. Ixtiyoriy $x \in M'$ uchun $N \geq N_1(c_3, \delta)$ bo'lganda $S_j(a_j x) \ll N Q^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \ln^4 N$, $j=1,2$ va $S_3(a_3 x) \ll N^{1+\frac{c}{\ln \ln N}} Q^{\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{4}}$ baholar o'rinli. Bunda $\ll$ - I.M.Vinogradov simvoli.

Bu lemmadan

$$I_2(N) \ll N^{2+\frac{c}{\ln \ln N}} Q^{\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{4}} \ln N \quad (4)$$

ekanligi kelib chiqadi. $I_1(N)$ ni baholash uchun Xardi-Litlvudning doiraviy usulidan [3] foydalanamiz va [4] ishdagi singari mulohaza yuritsak

$$I_1(N) \gg N^2 Q^{\frac{1}{6}} B^{\frac{1}{4}} \ln^{-2} N \quad (5)$$

ga ega bo'lamiz. $I(N) \geq I_1(N) - |I_2(N)|$ ekanligini inobatga olsak, (4) va (5) dan isbotlanishi talab etilayotgan tengsizlik $I(N) > 0$ kelib chiqadi.

Adabiyotlar ro'yxati

[1] Xua-Lo-Ken, Additive Theory of Prime Numbers, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. 1965.

[2] Ming-Chit Liu and Kai-Man Tsang, Small Prime Solutions of some Additive Equations, by Springer-Verlag Printed in Austria. Mh. Math. 111, 147-169 (1991).

[3] Vaughan R.C. The Hardy-Littlewood method. Second edition. Cambridge University Press. 1997. 232p.

[4] Allakov I., Muzropova N. S. The number of presentations of a natural number by the sum of the five squares of prime numbers. Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №5, pp. 82-86.

A CHARACTERIZATION OF AUTOMORPHISMS ON KISLITSIN ALGEBRAS

^{1,2}Arzikulov F., ³Urinboyev F., ³Abdumuminov M.

¹ V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan,

² Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan

³ Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

e-mail: arzikulovfn@gmail.com, furqatjonforever@gmail.com

In the present paper we study local and 2-local automorphisms of simple finite-dimensional algebras without finite basis of identities, constructed by Isaev and Kislitsin in [2].

A notion of local derivations was introduced and investigated by Kadison in [1]. Kadison proved that each continuous local derivation from a von Neumann algebra into its dual Banach bimodule is a derivation. A similar notion of 2-local derivations was introduced by Šemrl. Šemrl proved that any 2-local derivation of the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H is a derivation [4]. After, numerous new results related to the description of local and 2-local derivations of associative algebras have appeared.

Now, a linear operator ∇ on $\mathcal{A}$ is called a local automorphism if for every $x \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism ϕ_x of $\mathcal{A}$, depending on x , such that $\nabla(x) = \phi_x(x)$. The concept of local automorphism was introduced by Larson and Sourour [3] in 1990. They proved that, invertible local automorphisms of the algebra of all bounded linear operators on an infinite-dimensional Banach space X are automorphisms.

A similar notion, which characterizes non-linear generalizations of automorphisms, was introduced by Šemrl in [4] as 2-local automorphisms. Namely, a map $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (not necessarily linear) is called a 2-local automorphism, if for every $x, y \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism $\phi_{x,y}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ such that $\Delta(x) = \phi_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = \phi_{x,y}(y)$. After the work of Šemrl, it is appeared numerous new results related to the description of local and 2-local automorphisms of algebras.

In the present paper we study automorphisms of simple algebras, which do not belong to well-known classes of algebras (commutative, associative,

alternative, Lie, Jordan, etc.). The simple finite-dimensional algebras without finite basis of identities, constructed by Isaev and Kislitsin are such algebras.

Let $\mathcal{D} = \langle e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p \rangle_{\mathbb{F}}$ be an algebra over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 0 whose nonzero products of basis elements from

$$\{e, v_1, v_2, e_{11}, e_{12}, e_{22}, p\} \quad (1)$$

are defined by the rules

$$v_1 e_{11} = v_1, v_1 e_{12} = v_2, v_2 e_{22} = v_2, v_2 p = 1.$$

Then $\mathcal{D}$ is a simple algebra without finite basis of identities [2]. Let a be an element in $\mathcal{D}$. Then we can write

$$a = a_1 e + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$$

for some elements $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ in $\mathbb{F}$. Throughout of the paper let $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$. Conversely, if $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)^T$ is a column vector with $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ in $\mathbb{F}$, then, throughout of the paper, by $\hat{v}$ we will denote the element

$$a_1 e + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p,$$

i.e.,

$$\hat{v} = a_1 e + a_2 v_1 + a_3 v_2 + a_4 e_{11} + a_5 e_{12} + a_6 e_{22} + a_7 p.$$

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A linear bijective map $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is called an automorphism if $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ for any two elements $x, y \in \mathcal{A}$.

Our principal tool for the description of local and 2-local automorphisms of $\mathcal{D}$ is the following proposition.

Proposition 1. *A linear map $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ is an automorphism if and only if the matrix of Φ in the standard basis (1) has the following form:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2}a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{2,2}a_{5,5}} \end{pmatrix},$$

where $a_{2,2}, a_{5,5}$ are nonzero elements from $\mathbb{F}$. Here the action of Φ corresponds to multiplying the matrix by a column on the right.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A linear map $\nabla: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is called a local automorphism, if for any element $x \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism $\phi_x: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ such that $\nabla(x) = \phi_x(x)$.

Theorem 2. *Each local automorphism on the simple algebra $\mathcal{D}$ is an automorphism.*

A (not necessary linear) map $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is called a 2-local automorphism, if for any elements $x, y \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism $\phi_{x,y}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ such that $\Delta(x) = \phi_{x,y}(x), \Delta(y) = \phi_{x,y}(y)$.

Theorem 3. *Each 2-local automorphism on the simple algebra $\mathcal{D}$ is an automorphism.*

REFERENCES

- [1] Kadison R. Local derivations. *Journal of Algebra*, 1990. Vol. 130. P. 494–509. DOI: 10.1016/0021-8693(90)90095-6
- [2] Isaev I. M., Kislitsin A. V. An example of a simple finite-dimensional algebra with no finite basis of identities. *Doklady Mathematics.*, 2012. Vol. 86, No 3. P. 774–775. DOI: 10.1134/S1064562412060154
- [3] Larson D. R., Sourour A. R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. *Proc. Sympos. Pure Math., Providence, Rhode Island Part 2*, 1990. Vol. 51. P. 187–194. <http://hdl.handle.net/1828/2373> URL: <http://hdl.handle.net/1828/2373>
- [4] Šemrl P. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1997. Vol. 125. P. 2677–2680. DOI: 10.1090/S0002-9939-97-04073-2

OPEN PROBLEMS ON HOMOGENEOUS COMMUTATIVE REGULAR ALGEBRAS

¹Ayupov Sh. A., ^{1,2}Kudaybergenov K.K.

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

²Karakalpak Branch Academy of Sciences of Uzbekistan, Nukus, Uzbekistan
e-mail: shavkat.ayupov@mathinst.uz, karim2006@mail.ru

In this note we formulate open problems concerning homogeneous commutative regular algebras.

First give some preliminaries from the theory of regular algebras. More detailed info concerning regular algebras can be found in [2, 4].

Recall that an algebra $\mathbb{A}$ is said to be regular (in the sense of von Neumann) if, for any $a \in \mathbb{A}$ there is an element $x \in \mathbb{A}$ such that $axa = a$.

Let $\mathbb{A}$ be a commutative unital regular algebra with a unity $\mathbf{1}$ over a field $\mathcal{F}$ and let $\nabla = \nabla(\mathbb{A})$ be the set of all idempotents $\mathbb{A}$. On ∇ a partial order is defined as follows: $e \leq f$ if and only if $ef = e$. Then ∇ becomes a Boolean algebra with the greatest element $\mathbf{1}$, where $\mathbf{1} - e$ is the complement of an element e . For $a \in \mathbb{A}$, let $i(a)$ be the unique solution of the equations $axa = a$ and $xax = x$. The element $s(a) = ai(a) \in \nabla$ is called the support of a .

Let μ be a finite strictly positive countable-additive measure on ∇ . Define the function $\rho: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{R}$, by setting [3, P. 898]:

$$\rho(x, y) = \mu(s(x - y)), x, y \in \mathbb{A}. \quad (1)$$

Then $\mathbb{A}$ is a topological ring in the metric topology given by ρ .

Below we shall assume that $\mathbb{A}$ is a commutative unital regular algebra over an algebraically closed field $\mathcal{F}$ of characteristic zero, μ is a finite strictly positive countable-additive measure on ∇ and $\mathbb{A}$ is complete with respect to the metric ρ defined as in (1).

Let $\mathbb{B}$ be a regular subalgebra of $\mathbb{A}$ and let $\mathbb{B}[x]$ denote the algebra of all polynomials with coefficients from subalgebra $\mathbb{B}$. An element $a \in \mathbb{A}$ is said to be integral with respect to $\mathbb{B}$, if there exists a unitary polynomial $p \in \mathbb{B}[x]$, such that $p(a) = 0$. The integral closure of $\mathbb{B}$ is the set $\mathbb{B}^{(i)}$ of all elements that are integral with respect to $\mathbb{B}$. A subalgebra $\mathbb{B}$ is said to be integrally closed, if $\mathbb{B}^{(i)} = \mathbb{B}$.

Recall that $x, y \in \mathbb{A}$ differ at $e \in \mathcal{V}$ provided that from $fx = fy$, it follows that $ef = 0$ for all $f \in \mathcal{V}$. Clearly, this condition is equivalent to $e \leq s(x - y)$. A subset $\mathbb{S}$ of $\mathbb{A}$ is said to be locally linearly independent, if for an arbitrary nonzero $e \in \mathcal{V}$ and each family of elements $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{S}$ that differ pairwise at e and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{F}$, the condition $e(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = 0$ implies that $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. For $\mathbb{S} \subset \mathbb{A}$ denote by $\langle \mathbb{S} \rangle$ the set of elements of the form $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, where $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{S}$ and $k, n_1, \dots, n_k \in \mathcal{N}$. A set $\mathbb{S} \subset \mathbb{A}$ is called locally algebraically independent if $\langle \mathbb{S} \rangle$ is locally linearly independent. A locally algebraically independent subset $\mathbb{S}$ is said to be maximal if it is not a proper subset of a locally algebraically independent set. By the Zorn's Lemma, every locally algebraically independent set is a subset of a maximal locally algebraically independent subset [5].

Let $\mathbb{S}$ be a non empty subset in $\mathbb{A}$. Denote by $\mathbb{A}(\mathbb{S})$ the least regular, integrally closed, ρ -closed subalgebra of $\mathbb{A}$ generated by $\mathbb{S}$ and $\mathcal{V}$. A subset $\mathbb{S}$ in $\mathbb{A}$ is called faithful, if $s(x) = \mathbf{1}$ for all $x \in \mathbb{S}$. A commutative unital regular algebra $\mathbb{A}$ is called homogeneous, if there is a faithful locally algebraically independent subset $\mathbb{M}$ such that $\mathbb{A}(\mathbb{M}) = \mathbb{A}$. Note that the cardinality of any algebraic independent system $\mathbb{M}$ in $\mathbb{A}$ is not greater than the dimension of the algebra $\mathbb{A}$, that is, $|\mathbb{M}| \leq \dim \mathbb{A}$. The largest cardinal number γ such that there exists a faithful maximal locally algebraically independent subset $\mathbb{M}$ in $\mathbb{A}$ with the cardinality γ and $\mathbb{A}(\mathbb{M}) = \mathbb{A}$ is called the transcendence degree of $\mathbb{A}$ and is denoted as $trdeg(\mathbb{A}) = \gamma$. In this case we say that $\mathbb{A}$ is γ -homogeneous. In other words, $\mathbb{A}$ is γ -homogeneous, if there is a faithful locally algebraically independent subset $\mathbb{M}$ with the cardinality γ such that $\mathbb{A}(\mathbb{M}) = \mathbb{A}$ and any faithful system in $\mathbb{A}$ of cardinality bigger than γ is algebraically dependent [1].

Recall that a weight of the Boolean algebra $\mathcal{V}$ is the least cardinality of sets which generate $\mathcal{V}$, i.e.,

$$\tau(\mathcal{V}) = \inf\{|\mathcal{X}|: \mathcal{X} \text{ generates } \mathcal{V}\}.$$

For $0 \neq e \in \mathcal{V}$ set $\mathcal{V}_e = \{x \in \mathcal{V}: x \leq e\}$. A Boolean algebra $\mathcal{V}$ is said to be homogeneous, if $\tau(\mathcal{V}_e) = \tau(\mathcal{V})$ for any non zero $e \in \mathcal{V}$ [6].

Let (Ω, Σ, μ) be a measure space with a finite strictly positive countable-additive measure μ and let $S(\Omega) = S(\Omega, \Sigma, \mu)$ be the algebra of all (classes of) $\mathcal{F}$ -valued measurable functions on (Ω, Σ, μ) . It is clear that $S(\Omega)$ is a commutative unital regular algebra. A rank metric ρ on $S(\Omega)$ defined as in (1):

$$\rho(x, y) = \mu(\{\omega \in \Omega: x(\omega) \neq y(\omega)\}), x, y \in S(\Omega).$$

Recall that a measure space (Ω, Σ, μ) is called Maharam homogeneous if the Boolean algebra $\mathcal{V}$ of the algebra $S(\Omega)$ is homogeneous [3, Page 908]. Note that if (Ω, Σ, μ) is a Maharam homogeneous measure space, then $S(\Omega)$ is a homogeneous

commutative regular algebra. In particular, $S(0,1)$ is a homogeneous commutative regular algebra (see [1]).

At the end we formulate open problems concerning homogeneous commutative regular algebras.

Problem 1. *Is any commutative regular algebra $\mathbb{A}$ a direct sum of homogeneous commutative regular algebras?*

Problem 2. *Does cardinal number of any maximal faithful locally algebraically independent subset of a homogeneous commutative regular algebra $\mathbb{A}$ coincide with $\text{trdeg}(\mathbb{A})$?*

Problem 3. *Let (Ω, Σ, μ) be a Maharam homogeneous measure space with a finite strictly positive countable-additive measure μ . Find a connection between the transcendence degree of the algebra $S(\Omega)$ and the weight of the Boolean algebra $\mathcal{V}(S(\Omega))$.*

References

- [1] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Karimov Kh. *Isomorphisms of commutative regular algebras*. Positivity.—2022.—V.26, 11. P. 15.
- [2] Berberian S. K. Baer $\ast$ -rings. —Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 195, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
- [3] Fremlin D. Measure algebras. Handbook of Boolean algebras, Vol. 3.—North-Holland, Amsterdam, 1989. 877–980.
- [4] Goodearl K. R. Von Neumann regular rings. Monographs and Studies in Mathematics, 4.—Pitman, Boston, Mass.-London, 1979.
- [5] Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S. *The Wickstead problem*. Sib. Elektron. Mat. Izv.—2008.—V.5. P. 293–333.
- [6] Vladimirov D.A., Boolean algebras in analysis. Mathematics and its Applications, 540. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).

ON LOCAL, 2-LOCAL AUTOMORPHISMS AND DERIVATIONS OF TWO-DIMENSIONAL ALGEBRAS

¹*Bekbaev U.,* ²*Eshmirzayev Sh.*

¹*Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan;*

²*Tashkent Information Technology University, Tashkent, Uzbekistan;*

e-mail: uralbekbaev@gmail.com, shoxjahoneshmirzayev.95@mail.ru

The description problem of all local(2-local) automorphisms and local(2-local) derivations of a given algebra $\mathcal{A}$ is considered by many researchers, [1,2,3]. The current paper's main aim is to solve this problem for any two-dimensional algebra $\mathcal{A}$ given over any field $\mathbb{F}$, where every second and third-degree polynomial over $\mathbb{F}$ has a root in it. Note that results in [4], presented over an algebraically closed field $\mathbb{F}$, remain be true when every second and third-degree polynomial over $\mathbb{F}$ has a root. Let $\mathcal{A}$ be an algebra over a field $\mathbb{F}$ and $\text{Lin } \mathcal{A}$ stand for the set all linear maps from $\mathcal{A}$ to $\mathcal{A}$, as a vector space.

Definition 1. An element $A \in \text{Lin } \mathcal{A}$ ($D \in \text{Lin } \mathcal{A}$) is said to be an automorphism (respectively, a derivation) if for any $x, y \in \mathcal{A}$ the equality $A(xy) = A(x)A(y)$ (respectively, $D(xy) = D(x)y + xD(y)$) holds true. Let $\text{Aut } \mathcal{A}$ ($\text{Der } \mathcal{A}$) stand for the set of all automorphisms (respectively, derivations) of algebra $\mathcal{A}$.

Definition 2. An element $B \in \text{Lin } \mathcal{A}$ is said to be a local automorphism (local derivation) if for any $x \in \mathcal{A}$ there exists $A_x \in \text{Aut } \mathcal{A}$ (resp., $A_x \in \text{Der } \mathcal{A}$) such that $B(x) = A_x(x)$.

Definition 3. A map $B: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is said to be a 2-local linear map (2-local automorphism, 2-local derivation) if for any $x, y \in \mathcal{A}$ there exists $A_{(x,y)} \in \text{Lin } \mathcal{A}$ (respectively, $A_{(x,y)} \in \text{Aut } \mathcal{A}$, $A_{(x,y)} \in \text{Der } \mathcal{A}$) such that $B(x) = A_{(x,y)}(x)$ and $B(y) = A_{(x,y)}(y)$.

Further $\mathcal{A}$ stands for a two-dimensional algebra over a field $\mathbb{F}$, $e = (e_1, e_2)$ is a fixed linear basis for $\mathcal{A}$ over $\mathbb{F}$, as a vector space, and it is assumed that the field $\mathbb{F}$ has the following property: Every second and third-degree polynomial over $\mathbb{F}$ has a root. For the MSC of $\mathcal{A}$ we use notation

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 4, \mathbb{F}).$$

To describe the local(2-local) automorphisms, local(2-local) derivations of $\mathcal{A}$ we rely on the classification result of two-dimensional algebras, in term of their MSC, their automorphisms and derivations presented in [4]. In the next Theorems “only” means “only, up to isomorphism”.

Theorem 1. Only, up to isomorphism, for $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ one has $\text{LocAut } \mathcal{A} \neq \text{Aut } \mathcal{A}$, moreover, $\text{LocAut } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d^2 \end{pmatrix} : a, c, d \in \mathbb{F}, a, d \neq 0 \right\}$.

Theorem 2. If $\text{Char.}(\mathbb{F}) = 2$ then the equality $\text{LocDer } \mathcal{A} = \text{Der } \mathcal{A}$ is true for any $\mathcal{A}$. If $\text{Char.}(\mathbb{F}) \neq 2$ then only for $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ one has $\text{LocDer } \mathcal{A} \neq \text{Der } \mathcal{A}$, moreover $\text{LocDer } \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 2b \end{pmatrix} : a, b, c \in F \right\}$

Theorem 3. If $\text{Char.}(\mathbb{F}) \neq 3$ ($\text{Char.}(\mathbb{F}) = 3$) then $2\text{-LocAut } \mathcal{A} \neq \text{Aut } \mathcal{A}$ only for $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$, and $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ (respectively, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$.)

For all above listed algebras $\mathcal{A}$ their $2\text{-LocAut } \mathcal{A}$ are same and it consists of $B(x) = (x_1, c(x, y)x_1 + d(x, y)x_2)$, where $(c(x, y), d(x, y)) = (b(x), b(y))[x, y]^{-1}$ if $\det([x, y]) \neq 0$, $b(x) = x_1 a(x_2 / x_1)$ if, $x_1 \neq 0$, otherwise, $b(x) = dx_2$, $a(t)$ is any injective map from $\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}$, $0 \neq d \in \mathbb{F}$, $d(x, \lambda x) \neq 0$, $d(\lambda x, x) \neq 0$ at any $x \in \mathbb{F}^2$ and $\lambda \in \mathbb{F}$, $(c(x, \lambda x)x_1 + d(x, \lambda x)x_2 = b(x)$ whenever $x \neq 0$, $c(0, x)x_1 + d(0, x)x_2 = b(x)$.

Theorem 4. If $\text{Char.}(\mathbb{F}) \neq 3$ ($\text{Char.}(\mathbb{F}) = 3$) then $2\text{-LocDer } \mathcal{A} \neq \text{Der } \mathcal{A}$ only for $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$, and $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$ (respectively, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, where $\alpha_1 \in \mathbb{F}$.)

All the above listed algebras $\mathcal{A}$ have the same $2\text{-LocDer } \mathcal{A}$ and $2\text{-LocDer } \mathcal{A}$ consists of $D(x) = (0, c(x, y)x_1 + d(x, y)x_2)$, where $(c(x, y), d(x, y)) = (b(x), b(y))[x, y]^{-1}$ if $\det([x, y]) \neq 0$, $b(x) = x_1 a(x_2 / x_1)$ if, $x_1 \neq 0$, otherwise $b(x) = dx_2$, $a(t)$ is any map from $\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}$, $d \in \mathbb{F}$, $(c(\{x, y\}), d(\{x, y\})) = (a(x), \lambda a(x))$ if $y = \lambda x$, $(c(\{x, y\}), d(\{x, y\})) = (\lambda a(y), a(y))$ if $y = \lambda x$.

References

- [1] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Peralta A.M. A survey on local and 2-local derivations on C^* -and von Neumann algebras, in Topics in Functional Analysis and Algebra, *Contemporary Mathematics*, -2016, vol. 672, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 73-126.
- [2] Johnson B. Local derivations on C^* -algebras are derivations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353(2001), pp. 313-325.
- [3] Larson D., Sourour A. Local derivations and local automorphisms . *Proc. Sympos. Pure Math.*, 51 (1990), pp. 187-194.
- [4] Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I. The automorphism groups and derivation algebras of two-dimensional algebras, *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 12-1 (2018), pp.1-9, DOI 10.4172/1736-4337.1000290.

NILRAKALI MAKSIMAL UZUNLIKDAGI KVAZI-FILIFORM ALGEBRA BO'LGAN YECHILUVCHAN LEYBNITS ALGEBRASINING DIFFERENTIALASHLARI FAZOSINING LI STRUKTURASI

Bozorboyev A. F., Mamadaliev O'. X.

Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston

1-ta'rif. $\mathbb{F}$ maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy x, y, z elementlari uchun quyidagi Leybnits ayniyati bajarilsa,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

L algebra Leybnits algebrasi deyiladi, bu yerda $[-,-]$ – L da aniqlangan ko‘paytirish amali.

Ixtiyoriy L Leybnits algebrasi uchun quyidagi quyi markaziy va hosilaviy ketma-ketliklarni mos ravishda aniqlaymiz:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1]; \quad L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], \quad k \geq 1.$$

2-ta’rif. L Leybnits algebrasi uchun shunday $s \in \mathbb{N}$ son mavjud bo‘lib, $L^{[s]} = 0$ (mos ravishda, $L^s = 0$) bo‘lsa, u holda L yechiluvchan (mos ravishda, nilpotent) Leybnits algebrasi deyiladi.

Ixtiyoriy Leybnits algebrasining maksimal nilpotent ideali uning nilradikali deyiladi.

Tabiiy usulda graduirlangan Leybnits algebrasi ta’rifini keltiramiz.

L chekli o‘lchamli nilpotent Leybnits algebrasi bo‘lsin.

$\text{gr}(L)_i := L^i / L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$ deb olamiz, bu yerda s – L algebraning nilindeksi va $\text{gr}L = \text{gr}(L)_1 \oplus \text{gr}(L)_2 \oplus \dots \oplus \text{gr}(L)_{s-1}$ deb belgilab olamiz. $\text{gr}L$ da ko‘paytma ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$[x + L^i, y + L^j]_{\text{gr}L} = [x, y] + L^{i+j-1}, \quad \text{bu yerda } x \in L^{i-1}, y \in L^{j-1}.$$

U holda $[\text{gr}(L)_i, \text{gr}(L)_j]_{\text{gr}L} \subseteq \text{gr}(L)_{i+j}$ bo‘ladi va biz $\text{gr}L$ graduirlangan algebrani hosil qilamiz.

3-ta’rif. Yuqorida qurilgan graduirovkani *tabiiy graduirovka* deb ataymiz. Agar L Leybnits algebrasi $\text{gr}L$ algebraga izomorf bo‘lsa, u holda L *tabiiy usulda graduirlangan Leybnits algebrasi* deb ataladi.

4-ta’rif. Aytaylik L – n -o‘lchamli Leybnits algebrasi bo‘lsin. Agar uning nilindeksi $n-1$ ga teng bo‘lsa, u holda L kvazi-filiform Leybnits algebrasi deyiladi.

Aytaylik L – nolga teng bo‘lmagan fazolarning chekli soni bilan Z -graduirlangan Leybnits algebrasi, ya’ni $L = \bigoplus_{i \in Z} V_i$ bo‘lsin, bu yerda har qanday $i, j \in Z$ lar uchun $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

L nilpotent Leybnits algebrasi, agar $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$ bo‘lsa, bu yerda barcha i ($k_1 \leq i \leq k_t$) lar uchun $V_i \neq 0$, bog‘langan graduirovkani qabul qiladi deymiz.

$\text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1$ soni *graduirovkaning uzunligi* deyiladi. Keyinchalik, $l(L) = \max\{\text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1 \mid L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ bog‘langan graduirovka}\}$ ni L *Leybnits algebrasining uzunligi* deb ataymiz.

5-ta’rif. L Leybnits algebrasi, agar $l(L) = \dim L$ bo‘lsa, *maksimal uzunlikdagi algebra* deyiladi.

1-teorema[2]. Maksimal uzunlikdagi har qanday n -o‘lchamli ($n \geq 6$) kvazi-filiform L bo‘lmagan Leybnits algebrasi quyidagi o‘zaro izomorf bo‘lmagan algebra oilalaridan biriga izomorfdir:

$$M^{1,\delta} : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, & [e_{n-1}, e_1] = e_2, [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \delta e_4, \delta \in \{0, 1\}, & [e_i, e_{n-1}] = \delta e_{3+i}, & 2 \leq i \leq n-5; \end{cases}$$

$$M^{2,\lambda} : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in C; \end{cases}$$

$$M^{3,\alpha} : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_3, e_3] = \alpha e_6, & \alpha = 0, \text{ agar } n > 6, \alpha \in \{0,1\}, \text{ agar } n = 6, \end{cases}$$

Bu yerda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ algebraning bazisi

6-ta'rif. Aytaylik d - L Leybnits algebrasining chiziqli almashtirishi bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ lar uchun quyidagi tenglik bajrilsa

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)],$$

u holda d chiziqli almashtirishga L Leybnits algebrasining differensiallashi deyiladi.

2-teorema. [1] $R(M^{1,0}, 2)$ oilasining ixtiyoriy algebrasi quyidagi algebraga izomorf:

$$R(M^{1,0}, 2) : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_1, x_1] = e_1, & [e_i, x_1] = (i-2)e_i, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x_1] = 2e_n, & [x_1, e_1] = -e_1, \\ [e_i, x_2] = e_i, & & 2 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

3-teorema. [1] $R(M^{2,\lambda}, 2)$ oilasining ixtiyoriy algebrasi quyidagi algebralardan biriga izomorf:

$$R(M^{2,0}, 2) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_i, x_1] = ie_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [e_n, x_1] = e_n, \\ [x_1, e_1] = -e_1, \\ [e_{n-1}, x_2] = e_{n-1}, \\ [e_n, x_2] = e_n, \end{cases}$$

$$R(M^{2,-1}, 2) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, \\ [e_i, x_1] = ie_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [x_1, e_1] = -e_1, \\ [e_n, x_1] = -[x_1, e_n] = e_n, \\ [e_{n-1}, x_2] = -[x_2, e_{n-1}] = e_{n-1}, \\ [e_n, x_2] = -[x_2, e_n] = e_n \end{cases}$$

Biz $R(M^{2,-1}, 2)$ algebrani differensiallashini hisoblab quyidagi tasdiqni olishimiz mumkin.

1-tasdiq. Quyidagi chiziqli almashtirishlar $R(M^{1,0}, 2)$ algebraning differensiallashlari fazosining bazisini tashkil qiladi:

$$d_1(e_1) = e_1, \quad d_1(e_n) = 2e_n, \quad d_1(e_i) = (i-2)e_i, \quad 3 \leq i \leq n-1$$

$$d_2(e_i) = e_i, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

$$d_3(e_1) = e_n, \quad d_3(e_i) = e_{i+1}, \quad d_3(x_1) = e_1, \quad 2 \leq i \leq n-3$$

2-tasdiq. Quyidagi chiziqli almashtirishlar $R(M^{2,0}, 2)$ algebraning differensiallashlari fazosining bazisini tashkil qiladi:

$$d_1(e_i) = ie_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad d_1(e_n) = e_n,$$

$$d_2(e_i) = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad d_2(e_{n-1}) = e_n, \quad d_2(x_1) = -e_1$$

$$d_3(e_n) = e_n, \quad d_3(e_{n-1}) = e_{n-1}$$

3-tasdiq. $R(M^{1,0}, 2)$ algebraning differensiallashlarining $D(R(M^{1,0}, 2))$ Li algebrasi quyidagi algebraga izomorf bo'ladi:

$$[d_1, d_3] = d_3 = -[d_3, d_1].$$

4-tasdiq. $R(M^{2,0}, 2)$ algebraning differensiallashlarining $D(R(M^{2,0}, 2))$ Li algebrasi quyidagi algebraga izomorf bo'ladi:

$$[d_1, d_2] = d_2 = -[d_2, d_1].$$

$R(M^{2,-1}, 2)$ algebraning differensiallashlarining Li algebrasi [3] da keltirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Abdurasulov Q.K., Adashev J.Q., Casas J.M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras whose nilradical is quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 47(4). – P. 1578–1594.

[2] Camacho L.M., Cañete E.M., Gómez J.R., Omirov B.A. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length // Sib. Math. Journal. – 2011. – Vol.52(5). – P. 840–853.

[3] Mamadaliyev O'.X., Abduvaliyev Z.X. Nilradikali berilgan yechiluvchan Leybnits algebrasining differensiallashlari fazosining Li strukturasi//«Yosh matematiklarning yangi teoremlari–2022» ilmiy anjumani to'plami. Namangan 13-14 may 2022 y., 57-58 b.

PARALLELOPIPEDDAN EGILUVCHI SIRT HOSIL QILISH

Ibragimova F. A.

O'zbekiston Milliy Universiteti

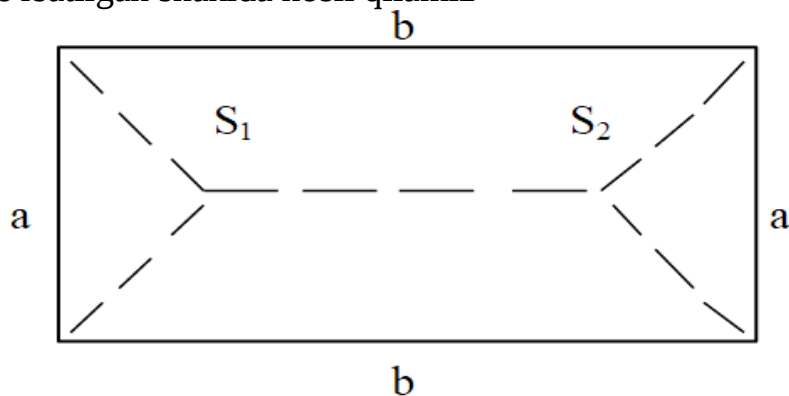
e-mail: faribragimova12@gmail.com

Ko'pyoqlikning yoqlari, qirralari o'zgarmagan holda deformatsiyalanishi uning egilishi deb ataladi.

Ma'lumki qavariq yopiq ko'pyoqlik egilmaydi. Demak faqat qavariq bo'lmagan ko'pyoqliklargina egilishi mumkin. Tajriba shuni ko'rsatadiki, yangi uch va yangi qirra kiritish yo'li bilan qavariq ko'pyoqlikdan egiluvchi ko'pyoqlik hosil qilish mumkin ekan.

Biz to'g'ri to'rtburchakli parallelopipeddan egiluvchi ko'pyoqlik hosil qilish usulini ko'rsatamiz. Bizga qirralari $a < b < c$ bo'lgan parallelopipedning ikki tomon b, c bo'lgan parallel qarama-qarshi yoqlarini o'zgarishsiz qoldiramiz. Shuningdek tomonlari a, b bo'lgan ikki qarama-qarshi yoqlarini asosiy egiluvchi yoqlar deb hisoblaymiz.

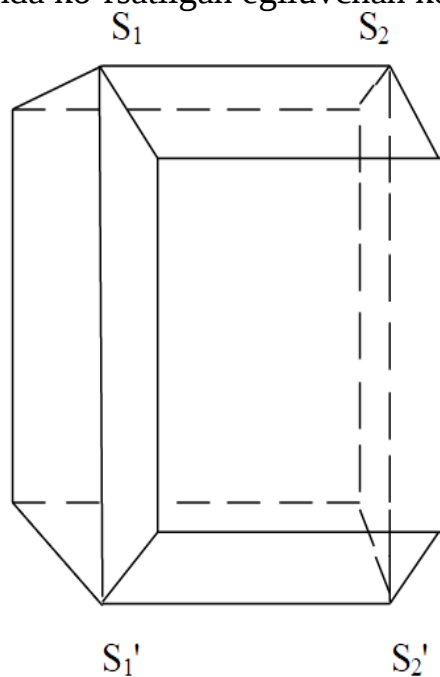
Qavariq parallelopipedni egish uchun uning egiluvchi yog'ida yangi uchlar va yangi qirralar hosil qilamiz. Har bir egiluvchi asosida yangi S_1 va S_2 uchlarini ushbu rasmda ko'rsatilgan shaklda hosil qilamiz



1-rasm

So'ngra chizmada ko'rsatilgan uzunliklarga ega chiziqlar bo'yicha yangi qirralar hosil qilamiz. Bu xolda egish jarayonida parallelopipedning yon tomonlariga S_1S_1' va S_2S_2' nuqtalarni tutashtiruvchi yangi qirralar hosil bo'ladi.

Natijada ushbu rasmda ko'rsatilgan egiluvchan ko'pyoqlik xosil bo'ladi.



2-rasm

Agar parallelopipedda $a=b$ bo'lsa ham bu egilishni xosil qilish mumkin, bunda S_1 va S_2 uchlar ustma-ust tushib qoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

[1] A.D.Aleksandrov “*Выпуклые многогранники*” Moskva, Leningrad, Davlat nashriyoti texnik- nazariy adabiyoti, 1950.

[2] A. A. Gaifulin "Изгибаемые многогранники и кузнечные мехи" Matematika instituti im. V.A.Steklov RAN, Moskva davlat universiteti im. M.V. Lomonosov, Skolkov nomidagi Novosibirsk fan va texnologiya instituti, 3 mart 2017 yil.

[3] I. X. Sabitov “ОБЪЁМЫ МНОГОГРАННИКОВ” Uzluksiz matematika ta'limi Moskva markaziy nashriyoti. Moskva 2002

MONGE-AMPERE EQUATION AND THEOREMS ON THE THEORY OF SURFACES IN ISOTROPIC SPACE

Ismoilov Sh.Sh., Xolmurodova G.N.

Tashkent state transport university, Uzbekistan

e-mail: sh.ismoilov@nuu.uz, xolmurodovaqulnoza3@gmail.com

The theory of surfaces is related to the Monge-Ampere equation. Many mathematicians have worked with this equation. Solutions to the Monge-Ampere equation have also been applied to economics. Bang Yen Chen applied the solution of the homogeneous Monge-Ampere equation to economics.

Let there be given a three-dimensional affine space A_3 , set by an affine coordinate system $Oxyz$.

Definition 1. [5] If the dot product of vectors $X \{x_1, y_1, z_1\}$ and $Y \{x_2, y_2, z_2\}$ is given by the formula

$$\begin{cases} (X, Y)_1 = x_1 x_2 + y_1 y_2, & (X, Y)_1 \neq 0 \\ (X, Y)_2 = z_1 z_2, & (X, Y)_1 = 0 \end{cases}$$

then the space is said to be an isotropic space and denoted by R_3^2 .

We define the norm of a vector and the distance between the points with the help of the dot product. More precisely, the vector norm $|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})}$, the distance between the points $M(X)$, $N(Y)$ and $MN = \sqrt{(Y - X, Y - X)}$.

In coordinates, they have the following form

$$MN_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (1)$$

if $MN_1 = 0$, then $MN_2 = |z_2 - z_1|$.

The motion, that is, a linear transformation that preserves the entered distance (1), has the form [2]:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \\ z' = Ax + By + z + c \end{cases} \quad (2)$$

Let a regular surface be given in R_3^2 by the vector equation

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$$

Then the first and second fundamental forms of the surface are determined by the following formulas [4]

$$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

where E, F, G and L, M, N are the coefficients of the first and second fundamental forms, respectively.

In this space, let the surface F , given by the equation $z = f(x, y)$, is one-valued projection onto the plane Oxy , the total and mean curvature at the point of the surface are determined by the following formulas:

$$K = LN - M^2 \quad 2H = L + N$$

by calculating these coefficients, then we have [1]

$$K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \quad 2H = f_{xx} + f_{yy}$$

Where, the right-hand side of the total and mean curvatures of the surface determine the Monge-Ampere and Laplacian operators, respectively. It follows that the study of the geometric characteristics of the surface in isotropic space is interdependent on the Monge-Ampere and Laplacian operators.

It is known from the complex analysis, if the real and imaginary part of the holomorphic function satisfy the Cauchy-Riemann conditions, they would be harmonic functions. If we look at each of the real and imaginary part of function as a surface, we determine the interrelationship between these surfaces according to the geometric characteristics. If the substitution preserves the distance, it is known that in Euclidian space it transfers a surface to a surface equal to itself, generated by motion and differing only in position.

We have the following theorem for such surfaces in Euclidian space:

Theorem 1: If the surfaces given by the functions $u(x, y)$ and $v(x, y)$ in Euclidian space satisfy the Cauchy-Riemann conditions, then these surfaces are equal to each other and differ only in position.

Theorem 2: If the functions $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are given in isotropic space and satisfy the Cauchy-Riemann conditions, the total and mean curvatures of the surfaces given by these equations are equal, but these surfaces are not equal to each other in the isotropic sense.

References

[1] Artykbaev A, Ismoilov Sh., Special mean and total curvature of a dual surface in isotropic spaces. International electronic journal of geometry, 2022, volume 15. Issue 1, pp1-10.

[2] Ayden M.E., Ogrenmis A.O., Translation hypersurfaces with constant curvature in 4-dimensional isotropic space. International Journal of Maps in Mathematics, Vol-2, Issue 1,2019,pp108-130.

[3] Розенфельд Б.А. ,Неевклидовы геометрии, Москва Наука,1969 547 с.

[4] Ismoilov Sh.Sh., Geometry of the Monge-Ampere equation in an isotropic space, Uzbek Mathematical Journal, vol-66,issue-2,(2022),pp.66-77.

[5] Strubecker K., Differential geometrie des isotropen Raumes I,II,III. Math.Z. vol-47(1942) 743-777; vol-48(1942); 369-427;vol-48(1943)369-427.

CIRKULYANT GRAFLARDAĞI TAMIRLI TOĞAYLAR SANI USHIN ONDIRIWSHI FUNKCIYASININ RACIONALLIGI HAQQIDA

Kamalov U. P.

Novosibirsk mámleketlik universiteti, Novosibirsk, Rossiya

e-mail: kamalovu939@gmail.com

Jumis haqqida qisqasha túsinik:

Meyli $s_1, s_2, \dots, s_k, 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$ shártin qanaatlandırıwshı natural sanlar bolsın. n dana $0, 1, 2, \dots, n-1$ tóbeli $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ grafi *cirkulyant graf* delinedi, eger hár bir $i, i = 0, 1, \dots, n-1$ tóbesi $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod{n}$ tóbelerine qońsılas bolsa. Eger $s_k < \frac{n}{2}$ bolsa, onda graftın barlıq tóbeleri $2k$ dárejeli. Eger n jup hám $s_k = \frac{n}{2}$ bolsa, onda barlıq tóbeler $2k-1$ dárejege iye ([1]).

Meyli $\Phi(x), \Gamma = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ yáki $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n/2)$ cirkulyant grafdağı $f_\Gamma(n)$ tamırlı toğaylar sanı ushın óndiriwshi funkciyası bolsın. Biz $\Phi(x)$ tın $\Phi(x) = -\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ shártin qanaatlandıratuğın hám koeficientleri pútin sanlardan bolğan racional funkciya ekenligin kórsetemiz. *Tamırlı terek* dep bir tóbesi belgilengen terekke aytamız. *Tamırlı toğay* - bul qurawshıları baylanısqa tamırlı tereklerinen ibarat toğay. *Tiykargı tamırlı toğay* dep Γ grafındağı, Γ grafinın barlıq tóbelerin óz ishine alıwshı tamırlı toğayğa aytamız. Bizler ápiwayı graflardı kórip shıǵamız.

Tiykargı nátiyje tómendegishe

Teorema 1. Meyli $f_\Gamma(n)$, jup dárejeli $\Gamma = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ yamasa taq dárejeli $\Gamma = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ cirkulyant grafinın tiykargı tamırlı terekleri sanı bolsın. Onda

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_\Gamma(n) x^n$$

koeficientleri pútin sanlardan ibarat bolğan racional funkciya. Bunnan tısqari,

$$\Phi(x) = -\Phi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Jumıstın áhmiyetliliği:

Cirkuliant graflardağı toğaylardı biriktiriw, matematikanın tez rawajlanıp atırğan hám pútkilley jańa tarawlarınan biridur. Jumis sonı kórsetedi, cirkulyant

graflardagi to'g'aylardi biriktiriv óndirivshi funktsiyanin ratsionalligin tabiwidan baslanadi. Tiykargi nátiyje taq dárejelili cirkulyant graflar uchín tuwra keledi $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$.

Ádebiyatar dizimi

[1] A. D. Mednykh and I. A. Mednykh. The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic, Discrete Math. 342 (2019), 1772-1781.

[2] L.A. Grunwald, I.A. Mednykh. The number of rooted forests in circulant graphs. ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA 22 (2022) P4.10.

ISOMORPHISMS OF COMMUTATIVE REGULAR ALGEBRAS

¹**Karimov. H. K.,** ²**Maxmudova. D. M.**

¹*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan;*

²*Urganch State University*

e-mail: hakimkarimov1995@gmail.com

A ring $\mathcal{A}$ is said to be regular in the sense of von Neumann if, for every $a \in \mathcal{A}$, the equation $axa = a$ has a solution in $\mathcal{A}$. An algebra $\mathcal{A}$ is said to be regular, if $\mathcal{A}$ is a regular ring in the sense of von Neumann.

Let $\mathcal{A}$ be a commutative unital regular algebra with a unity $\mathbf{1}$ over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic 0 and let $\nabla = \nabla(\mathcal{A})$ denote the set of idempotent elements of $\mathcal{A}$. On the set ∇ a partial order is defined as follows: $e \leq f$ if and only if $ef = e$. Then ∇ becomes a Boolean algebra with the greatest element $\mathbf{1}$, where the complement Ce of an element e is $\mathbf{1} - e$. A nonzero element $q \in \nabla$ is called an atom if the relations $0 \neq e \leq q$ and $e \in \nabla$ imply the equality $e = q$. For every $a \in \mathcal{A}$, let $i(a)$ denote the partial inverse of a , i.e., $i(a)$ is the solution of the equations $axa = a$ and $xax = x$. It is clear that

$$i(ab) = i(a)i(b), \quad i(i(a)) = a, i(e) = e$$

for all $a, b \in \mathcal{A}$ and $e \in \nabla$. The element $s(a) = ai(a)$ is called the support of a . As is known, $s(a)$ is the least idempotent $e \in \nabla$ with $ea = a$ (see [1]).

We assume that $\mathcal{B}$ is a subalgebra in $\mathcal{A}$ such that $\nabla \subset \mathcal{B}$.

Recall that two elements $x, y \in \mathcal{A}$ are said to be orthogonal (notation $x \perp y$), if $s(x)s(y) = 0$.

A linear mapping $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ is said to be band preserving, if

$$x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp y$$

(see for details [2,3]). Since $x \perp \mathbf{1} - s(x)$, we see that Φ is band preserving iff

$$s(\Phi(x)) \leq s(x)$$

for all $x \in \mathcal{A}$.

Theorem 1. *Let $\mathcal{A}$ be a commutative unital regular algebra over an algebraically closed field $\mathbb{F}$ of characteristic zero such that*

1. there exists a finite strictly positive countable-additive measure μ on the Boolean algebra ∇ of all idempotents in $\mathcal{A}$;

2. $\mathcal{A}$ is a complete with respect the metric $\rho(a, b) = \mu(s(a - b))$, $a, b \in \mathcal{A}$.

Let $\mathcal{B}$ be a subalgebra of $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{B} \supset \nabla$. Then for any band preserving monomorphism $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ there exists a band preserving monomorphism $\Psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ such that $\Psi|_{\mathcal{B}} = \Phi$.

Theorem 2. Let $\mathcal{A}$ be a commutative unital regular algebra as in Theorem 1 Then there is a non trivial band preserving monomorphism on $\mathcal{A}$ into itself if and only if $\mathbb{F}_c(\nabla) \neq \mathcal{A}$.

References

[1] S. K. Berberian. Baer *-rings, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 195, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[2] A. G. Kusraev. Dominated Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3] A. G. Kusraev. Automorphisms and derivations on a universally complete complex $\hat{f}$ -algebra, Siberian Math. J. 47 (1) (2006) 77–85.

FINITE ∇ -DEFINABILITY AND COMPUTABILITY OF DATA MODELS

Karimova N. R.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: nodirakarimova@bk.ru

You can get acquainted with undefined concepts in the books [1–4]. All other necessary definitions are given below.

Everywhere below, by the word system, unless otherwise stated, we mean an arbitrary algebraic system of effective signature, i.e., the function that assigns to a signature symbol its type is computable.

To each sort $\lambda \in \Lambda$ we associate the set of positive integers ω_λ of type λ assuming that $\omega_{\lambda_i} \cap \omega_{\lambda_j} = \emptyset$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$). The presence of the same indexes for M_λ and ω_λ should not be misleading -- these are different type disjoint sets of elements of a completely different nature.

Definition 1. Algorithmic representation (enumeration) of the countable system $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ of the effective many-sorted signature Σ is any such family $\mu = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$ of surjective mappings, where

$$\mu_\lambda: \omega_\lambda \rightarrow M_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda),$$

for which there exists an effective family F_{comp} of computable functions representing the Σ -operations of the system $\mathfrak{M}$ in the enumeration μ , i.e. any operation $\sigma \in \Sigma$ of type $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \lambda \rangle$ is represented by a computable function

$$f_\sigma \in F_{comp}: \omega_{\lambda_1} \times \dots \times \omega_{\lambda_n} \rightarrow \omega_\lambda,$$

corresponding to it, that the following commutative diagram holds:

$$\forall x_1 \in \omega_{\lambda_1} \dots \forall x_n \in \omega_{\lambda_n} [\sigma(\mu_{\lambda_1} x_1, \dots, \mu_{\lambda_n} x_n) = \mu_{\lambda} f_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)].$$

Definition 2. If μ is an algorithmic representation of the system $\mathfrak{M}$, then the pair $(\mathfrak{M}, \mu)$ is called an enumerated system, and the family of enumeration equivalences $\ker(\mu) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{\langle x, y \rangle \mid \mu_{\lambda} x = \mu_{\lambda} y\}$ is the kernel of the representation.

A mapping $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ of many-sorted systems of signature $\Sigma = \langle C, F, P, \Lambda \rangle$ is called a homomorphism if φ is the union of a family of mappings $\varphi_{\lambda}: M_{\lambda} \rightarrow N_{\lambda}, \lambda \in \Lambda$ preserving operations and relations, i.e.

for any constant $c_{\lambda} \in M_{\lambda}$ of sort λ the value $\varphi_{\lambda}(c_{\lambda})$ is the value $c_{\lambda} \in N_{\lambda}$;

if σ is a Σ -operation of type $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \lambda \rangle$, then $\forall x_1 \in M_{\lambda_1} \dots \forall x_n \in M_{\lambda_n} [\varphi_{\lambda} \sigma_M(x_1, \dots, x_n) = \sigma_N(\varphi_{\lambda_1} x_1, \dots, \varphi_{\lambda_n} x_n)]$, where σ_M, σ_N denote the interpretation of the function symbol σ in the $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ systems, respectively;

if p is the symbol of a Σ -relation of type $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ and $\mathfrak{M} \models p_M(x_1, \dots, x_n)$, then $\mathfrak{N} \models p_N(\varphi_{\lambda_1} x_1, \dots, \varphi_{\lambda_n} x_n)$, where p_M, p_N denote the interpretation of the relation symbol p in systems $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ respectively.

All homomorphisms of enumerated systems considered by us are computable, i.e., are supported by functions computable on indices in the following sense ([4]).

Definition 3. A homomorphism $\varphi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ of many-sorted systems of signature $\Sigma = \langle C, F, P, \Lambda \rangle$ is called a computable homomorphism (or morphism) of enumerated models $(\mathfrak{M}, \mu) \rightarrow (\mathfrak{N}, \nu)$ if for each copy of the set of positive integers ω_{λ} of type $\lambda \in \Lambda$ (which is the enumeration set for M_{λ} and N_{λ}) there exists a computable function $f_{\lambda}: \omega_{\lambda} \rightarrow \omega_{\lambda}$ such that

$$\varphi_{\lambda} \mu_{\lambda} = \nu_{\lambda} f_{\lambda}; \lambda \in \Lambda.$$

Definition 4. An enumerated system $(\mathfrak{M}, \mu)$ is said to be computable (positive, negative) if the set $\{\langle m, \bar{x} \rangle \mid \mathfrak{M} \models p_m(\mu \bar{x}), p_m \in P\}$ is computable (computably enumerable, coenumerable).

In the many-sorted case, it is implied that the family of complete inverse images of representations $\mu_{\lambda} (\lambda \in \Lambda)$ is computable (computably enumerable, coenumerable), i.e., for example, if $(\mathfrak{M}, \mu)$ is an enumerated system with base set $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_{\lambda}$ and $p \in P$ of type $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$, then p is computable (positively, negatively) in the enumeration $\mu = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mu_{\lambda} (\mu_{\lambda}: \omega_{\lambda} \rightarrow M_{\lambda})$ if the set

$$\{\langle \mu_{\lambda_1}^{-1} m_1, \dots, \mu_{\lambda_n}^{-1} m_n \rangle \mid \mathfrak{M} \models p(m_1, \dots, m_n)\}$$

is computable (computably enumerable, coenumerable)

It turned out that the characterizability of a negative system in the class of all its homomorphic images and preimages by a suitable computably enumerable set of universal sentences is equivalent to its computability.

Theorem 1. For a negative system $(\mathfrak{M}, \mu)$ of signature Σ the following conditions are equivalent:

1. μ is computable;
2. there is a computably enumerable set Φ of universal sentences of signature $\Sigma \cup C$ realizable in $\mathfrak{M}_\mu$ such that for any Φ -system its subsystem generated by constants is isomorphic to $\mathfrak{M}_\mu$.

References

- [1] Goncharov S.S., Ershov Yu.L. Constructive Models (ser. Siberian School of Algebra and Logic), Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, etc. (2000).
- [2] Mal'tsev A.I. Algebraic Systems [Russian], Nauka, Moscow (1970).
- [3] Soare R.I. Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).
- [4] Ershov Yu.L. The Theory of Enumerations [Russian], Nauka, Moscow (1977).
- [5] Kasymov N.Kh., Morozov A.S. Logical aspects of the theory of abstract data types. Vychisl. Systemy, 1987, Vol. 122, 73–96.
- [6] Kasymov N.Kh. Recursively separable enumerated algebras. Russian Math. Surveys, 1996, Vol. 51, No. 3, 509–538.

DESCRIPTION OF SOLVABLE EXTENSIONS OF SOME LIE SUPERALGEBRAS

Kurbanbaev T., Uzakbaev N.

Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics

e-mail: tuuelbay@mail.ru, uzakhbaev21@mail.ru

The present note is devoted to maximally solvable Lie extension Lie superalgebras whose even part is a of the model filiform Lie algebra. Namely, the Lie superalgebra is considered, which the even part is a solvable Lie algebra with a filiform nil radical, the odd part is two dimensional.

Definition 1. A $\mathbb{Z}_2$ -graded vector space $L = L_0 \oplus L_1$ is called a *Lie superalgebra* if it is equipped with a product $[-, -]$ which satisfies the following conditions:

- 1) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|} [y, x]$,
- 2) $(-1)^{|z||x|} [x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|} [y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|} [z, [x, y]] = 0$, (super Jacobi identity)

for any $x, y, z \in L$. Here, $|x| = 0$ if $x \in L_0$ and $|x| = 1$ if $x \in L_1$.

Theorem 1 [2]. A maximally solvable L_0 Lie algebra, which is a nilradical filiform Lie algebra, has a basis $\{e_1, e_2, e_3, x, y\}$ such that the multiplication table of this algebra is as follows

$$L_0 : [e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3.$$

Let $L = L_0 \oplus L_1$ be a Lie superalgebra whose even part is a maximally solvable Lie with nilradical of the filiform Lie algebra and let $L_1 = \langle f_1, f_2 \rangle$.

The following theorem is main result the present note.

Theorem 2. Let $L = L_0 \oplus L_1$ be a Lie super algebra whose even part is a maximally solvable Lie extension of the model filiform Lie algebra. Then L is isomorphic the following super algebras:

$A_1 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31}f_1, [e_3, f_2] = -A_{31}f_2,$ $[x, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [y, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$
$A_2 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = A_{11}f_1 + A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1,$ $[e_3, f_2] = -A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1, [x, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [y, f_1] = B_1f_1,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$
$A_3 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31}f_1, [e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2,$ $[x, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [y, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$
$A_4 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = A_{11}f_1 + A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1,$ $[e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1, [x, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [y, f_1] = B_1f_1,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_1f_2, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$
$A_5 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31}f_1, [e_3, f_2] = -A_{31}f_2,$ $[x, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [y, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$

$A_6 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = A_{11}f_1 + A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1,$ $[e_3, f_2] = -A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}(B_1 - B_4)f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2,$ $[y, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}(B_1 - B_4)f_2, [y, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3,$ $[f_2, f_2] = \alpha_3e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$
$A_7 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31}f_1, [e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2,$ $[x, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [y, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2,$ $[y, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$
$A_8 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = A_{11}f_1 + A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1,$ $[e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}(B_1 - B_4)f_2, [x, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2,$ $[y, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}(B_1 - B_4)f_2, [y, f_2] = B_3f_1 + B_4f_2, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0,$ $[f_1, f_2] = 0.$

$A_9 :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = A_{11}f_1 + A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2,$ $[e_3, f_1] = A_{31}f_1 + A_{32}f_2, [e_3, f_2] = A_{32}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}B_1f_2,$ $[x, f_2] = 0, [y, f_1] = B_1f_1 + \frac{1}{2}B_1f_2, [y, f_2] = 0, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3e_3,$ $[f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$
$A_{10} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1 + A_{32}f_2,$ $[e_3, f_2] = A_{32}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2, [x, f_2] = 0, [y, f_1] = B_1f_1 + B_2f_2,$ $[y, f_2] = 0, [f_1, f_1] = \alpha_3e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3e_3.$
$A_{11} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = A_{22}f_2, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31}f_1 + A_{32}f_2,$ $[e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_2f_2, [x, f_2] = 0, [y, f_1] = B_2f_2, [y, f_2] = 0,$ $[f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$
$A_{12} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11}f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11}f_2, [e_2, f_1] = -A_{11}f_2, [e_2, f_2] = -A_{11}f_2, [e_3, f_1] = A_{31}f_1 + A_{32}f_2,$ $[e_3, f_2] = E_{31}f_1 - A_{31}f_2, [x, f_1] = B_1f_1, [x, f_2] = 0, [y, f_1] = B_1f_1, [y, f_2] = 0,$ $[f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$

$A_{13} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11} f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11} f_2, [e_2, f_1] = A_{11} f_1 + A_{22} f_2, [e_2, f_2] = -A_{11} f_2,$ $[e_3, f_1] = A_{31} f_1 + A_{32} f_2, [e_3, f_2] = E_{31} f_1 - A_{31} f_2, [x, f_1] = 0, [x, f_2] = 0, [y, f_1] = 0,$ $[y, f_2] = 0, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0.$
$A_{14} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = \alpha f_1,$ $[e_1, f_2] = -\alpha f_2, [e_2, f_1] = \alpha f_1 + A_{22} f_2, [e_2, f_2] = -\alpha f_2, [e_3, f_1] = A_{31} f_1 + A_{32} f_2,$ $[e_3, f_2] = E_{31} f_1 - A_{31} f_2, [x, f_1] = B_1 f_1 + B_2 f_2, [x, f_2] = 0, [y, f_1] = B_1 f_1 + B_2 f_2,$ $[y, f_2] = 0, [f_1, f_1] = 0, [f_2, f_2] = 0, [f_1, f_2] = 0, \alpha = \frac{B_1 A_{22}}{2B_2}.$
$A_{15} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = 0,$ $[e_1, f_2] = 0, [e_2, f_1] = 0, [e_2, f_2] = 0, [e_3, f_1] = A_{31} f_1, [e_3, f_2] = -A_{31} f_2,$ $[x, f_1] = B_1 f_1 + B_2 f_2, [x, f_2] = B_1 f_2, [y, f_1] = B_1 f_1 + B_2 f_2, [y, f_2] = B_1 f_2,$ $[f_1, f_1] = \alpha_3 e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3 e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3 e_3.$
$A_{16} :$	$[e_2, e_1] = e_3, [e_1, x] = e_1, [e_3, x] = e_3, [e_2, y] = e_2, [e_3, y] = e_3, [e_1, f_1] = A_{11} f_1,$ $[e_1, f_2] = -A_{11} f_2, [e_2, f_1] = A_{11} f_1 + A_{11} f_2, [e_2, f_2] = -A_{11} f_2, [e_3, f_1] = A_{31} f_1,$ $[e_3, f_2] = -A_{31} f_2, [x, f_1] = B_1 f_1, [x, f_2] = B_1 f_2, [y, f_1] = B_1 f_1, [y, f_2] = B_1 f_2,$ $[f_1, f_1] = \alpha_3 e_3, [f_2, f_2] = \alpha_3 e_3, [f_1, f_2] = \alpha_3 e_3.$

References

- [1] Kac V., Lie superalgebras, Adv. Math. 26(1993) 203–211.
[2] Šnobl L., Winternitz P., Classification and Identification of Lie Algebras. CRM Monograph series, Centre de Recherches Mathématiques Montreal. –2014, 33.

KELI DARAXTINI BA’ZI SHARTLARNI QANOATLANTIRUVCHI INDEKSI 4 BO’LGAN NORMAL QISM GRUPPAGA NISBATAN BO’LINISH STRUKTURASI

Normatov E. P., Bekmurodova D. B.

O’zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O’zbekiston

e-mail: erkinormatov@yandex.ru, bekmurodovadilorom50@gmail.com

Daraxtlar sinfi graflar nazariyasining alohida ahamiyat kasb etuvchi muhim sinflaridan biri sanaladi. Daraxtlar sinfining vakili bo’lmish Keli daraxti statistik mexanikaning ko’pgina modellari o’rganilgan hamda bir qancha masalalarning yechimi topilgan daraxt hisoblanadi. Bu masalalarni hal etishda Keli daraxtining gruppaviy tasviridan foydalanilgan.

Ta’rif: Har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiquvchi, siklga ega bo’lmagan cheksiz graf k -tartibli Keli daraxti deyiladi va $T^k = (V, L)$ kabi belgilanadi. Bu yerda

V –daraxtning uchlari to’plami, L esa daraxtning qirralari to’plami.

G_k – ta tashkil etuvchilari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ bo‘lgan ikkinchi tartibli siklik gruppalarining erkin ko‘paytmasidan iborat gruppaga bo‘lsin.

Bu tashkil etuvchilar harflar deb ataladi. Bu harflarni yonma-yon yozishdan hosil bo‘lgan $w = a_1 a_2 \dots a_n$ so‘zlarni G_k gruppaning elementlari deb ataymiz.

$w_x(a_i) - x \in G_k$ elementdagi a_i lar soni;

$N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ -dastlabki $k+1$ ta natural son;

$H_A = \{x \in G_k \mid w_x(a_i) - \text{juft}\}$ bo‘lsin, bu yerda $A \subseteq N_k$ va $A \neq \emptyset$.

G_k gruppaga elementlari va Keli daraxtining V uchlari to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan [1].

Teorema[2]. Ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan $A, B \subseteq N_k$ lar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1) H_A -indeksi 2 ga teng bo‘lgan normal bo‘luvchi;

2) $H_A \neq H_B$ ixtiyoriy $A \neq B \subset N_k$

3) Aytaylik, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq N_k$ berilgan bo‘lsin. Agar $\bigcap_{i=1}^m H_{A_i}$ qisqarmaydigan

bo‘lsa, u holda bu kesishma G_k gruppaning tartibi 2^m ga teng bo‘lgan normal bo‘luvchisi bo‘ladi.

$H_0 - G_k$ gruppaning indeksi r bo‘lgan normal bo‘luvchisi bo‘lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1) $d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$ x va y uchlari orasidagi masofa, bu yerda $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ – eng yaqin qo‘shnilar;

2) $W_m(x) = \{y \in G_k \mid d(x, y) = m\}$ – markazi x nuqtada, radiusi m ga teng sfera;

3) $q_{i,m}(x) = |W_m(x) \cap H_i|$, $i = \overline{0, r-1}$ - markazi x nuqtada, radiusi m ga teng sferadagi H_i sinfga kiruvchi uchlari soni;

4) $Q_m(x) = (q_{0,m}(x), q_{1,m}(x), \dots, q_{r-1,m}(x))$

Teorema[3]. $\forall x \in G_k$ hamda $\forall m \in N$ uchun $\exists \pi_x$ o‘rinlashtirish mavjudki, $Q_m(e)$ vektor koordinatalari uchun $\exists \pi_x Q_m(e) = Q_m(x)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu teoremadan kelib chiqadiki, masalalarni $Q_m(e)$ vektor atrofida ko‘rish yetarlidir.

Quyidagi masalani qaraymiz:

$A \cap B \neq \emptyset$ va $A \cup B = N_k$ bo‘lgan holda $Q_m(e)$ vektor koordinatalari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Bunga quyidagi teorema orqali javob beramiz.

Teorema: $\forall A, B \subset N_k$ ($k \geq 2$) uchun $A = N_k \setminus B$ bo‘lsa, $H_0 = H_A \cap H_B$ qism gruppaga uchun

i. m -toq bo‘lganda $Q_m(e) = (0, a, b, 0)$

ii. m -juft bo‘lganda $Q_m(e) = (c, 0, 0, d)$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Bu yerda a, b, c, d – sonlar natural sonlar.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Ганиходжаев Н.Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли. // Доклады АН РУз. – Ташкент, 1994. – № 4. – С.3-5.

[2] Розиков У.А. Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса. // Теор. и матем. физика. – Москва, 1997. – Т.112. – № 1. – С.170-176.

[3] Норматов Э.П. О разбиениях множества m -ых соседей вершины дерева Кэли. // УзМЖ. – Ташкент, 2002. – № 2. – С. 50-54.

THE WEAKLY PERIODIC p -ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURES FOR THE p -ADIC ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE

¹*Rahmatullaev M.M.,* ^{1,2}*Abdukaxorova Z.T.*

¹*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences;*

²*Namangan state university*

e-mail: mrachmatullaev@rambler.ru, zulxumorabdukaxorova@gmail.com)

Let Q be the field of rational numbers. The completion of Q with respect to the p -adic norm defines the p -adic field which is denoted by Q_p (see [1]).

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree (see [2]).

We consider a p -adic Ising model where the spin values take in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. We define a configuration σ on V by the function $\sigma: x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$.

A formal p -adic Hamiltonian $H: \Omega \rightarrow Q_p$ of the p -adic Ising model is defined by

$$H(\sigma) = J \sum_{\{x,y\} \in L} \sigma(x)\sigma(y), \quad (1)$$

where $0 < |J|_p < p^{-1/(p-1)}$ for any $\langle x, y \rangle \in L$.

A p -adic probability generalized Gibbs measure μ_h^n is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\phi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \phi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2)$$

Let $G_k / G_k^* = \{H_0, H_1, \dots, H_r\}$ be a factor group, where G_k^* is a normal subgroup of index $r \geq 1$.

Definition 1. A set $h = \{h_x, x \in G_k\}$ of quantities is called G_k^* -periodic if $h_{xy} = h_x$, for all $x \in G_k$ and $y \in G_k^*$.

Definition 2. A set of quantities $h = \{h_x, x \in G_k\}$ is called G_k^* -weakly periodic, if $h_x = h_{ij}$, for any $x \in H_i$ $x_{\downarrow} \in H_j$.

Definition 3. A p -adic generalized Gibbs measure μ is said to be G_k^* – (weakly) periodic if it corresponds to a G_k^* – (weakly) periodic h . We call a G_k – periodic measure a translation-invariant measure.

Let

$$H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{even} \right\},$$

where $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, 3, \dots, k+1\}$, and $\omega_x(a_i)$ is the number of letters a_i in a word $x \in G_k$. According to the selection of the normal subgroup, different weakly periodic Gibbs measures are found (see [3]). The set of weakly periodic Gibbs measures also includes the set of periodic (in particular translation-invariant) Gibbs measures.

In this work, we consider the case $|A|=1$. According to (2) the H_A -weakly periodic set of h_x has the following form

$$h_x = \begin{cases} h_{00}, & \text{if } x \in H_A, & x_{\downarrow} \in H_A, \\ h_{01}, & \text{if } x \in H_A, & x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A, \\ h_{10}, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, & x_{\downarrow} \in H_A, \\ h_{11}, & \text{if } x \in G_k \setminus H_A, & x_{\downarrow} \in G_k \setminus H_A. \end{cases} \quad (3)$$

By (2) we have

$$\begin{cases} h_{00}^2 = \frac{\theta h_{10}^2 + 1}{\theta + h_{10}^2} \cdot \frac{\theta h_{00}^2 + 1}{\theta + h_{00}^2}, \\ h_{01}^2 = \left(\frac{\theta h_{00}^2 + 1}{\theta + h_{00}^2} \right)^2, \\ h_{10}^2 = \left(\frac{\theta h_{11}^2 + 1}{\theta + h_{11}^2} \right)^2, \\ h_{11}^2 = \frac{\theta h_{11}^2 + 1}{\theta + h_{11}^2} \cdot \frac{\theta h_{01}^2 + 1}{\theta + h_{01}^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Consider operator $W : R^4 \rightarrow R^4$, defined as follows:

$$\begin{cases} h'_{00} = \frac{\theta h_{10}^2 + 1}{\theta + h_{10}^2} \cdot \frac{\theta h_{00}^2 + 1}{\theta + h_{00}^2}, \\ h'_{01} = \left(\frac{\theta h_{00}^2 + 1}{\theta + h_{00}^2} \right)^2, \\ h'_{10} = \left(\frac{\theta h_{11}^2 + 1}{\theta + h_{11}^2} \right)^2, \\ h'_{11} = \frac{\theta h_{11}^2 + 1}{\theta + h_{11}^2} \cdot \frac{\theta h_{01}^2 + 1}{\theta + h_{01}^2}. \end{cases}$$

Note that the system of (4) describes fixed points of the operator W , i.e. $h = W(h)$.

Lemma 1. The following sets are invariant with respect to the operator W :

$$I_1 = \{h \in R^4 : h_{00} = h_{01} = h_{10} = h_{11}\},$$

$$I_2^\pm = \{h \in R^4 : h_{00} = h_{11}, h_{10} = h_{01}\}.$$

Theorem 1. If $p \equiv 1 \pmod{4}$ then on $I_2^\pm$ there exists sixteen weakly periodic (non-periodic) p -adic generalized Gibbs measures for the p -adic Ising model on the Cayley tree of order two.

References

- [1] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. V. Zelenov, p -Adic Analysis and Mathematical Physics (*World Sci. Publ., Singapore*, 1994).
- [2] U. A. Rozikov, Gibbs Measures on Cayley Trees (*World Sci. Publ., Singapore*, 2013).
- [3] Rozikov U. A., Rahmatullaev M. M. Description of weakly periodic Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree. *Theor. Math. Phys.*, 156(2): (2008).

FUNCTIONAL EQUATIONS FOR THE SOS MODEL WITH COMPETING INTERACTIONS ON A CAYLEY TREE

¹Raxmatullayev M., ²Karshiboev O. Sh., ³Ergashev A. A.

¹Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan

²Chirchik state pedagogical university, Chirchik, Uzbekistan

³Kokand state pedagogical institute, Kokand, Uzbekistan

e-mail: mraxmatullaev@rambler.ru, okarshiboevsher@mail.ru

In this work, we consider a SOS (solid-on-solid) model with nearest-neighbour and one-level second competing interactions on the Cayley tree of order two (see [1] and references therein for more details about SOS models on trees). We obtain a system of functional equations for this model, which each solution of the system corresponds to a limiting Gibbs measure.

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a cycles-free graph such that from each vertex of which issues exactly $k + 1$ edges. We denote by V the set of the vertices of tree and by L the set of edges of tree. The distance on this tree, denoted by $d(x, y)$, is defined as the number of nearest-neighbour pairs of the minimal path between the vertices x and y (where path is a collection of nearest neighbour pairs, two consecutive pairs sharing at least a given vertex). For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m$$

and the set of direct successors of is denoted by

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

We observe that, for any vertex $x \neq x^0$, x has k direct successors and x^0 has $k + 1$. The vertices x and y are called second neighbors which is denoted by

$> x, y <$, if there exists a vertex $z \in V$ such that $\langle x, z \rangle$ and $\langle y, z \rangle$ are nearest neighbors. We consider a semi-infinite Cayley Γ^k of order $k \geq 2$, i.e. a cycles-free graph with $(k+1)$ edges issuing from each except x^0 and with k edges issuing from the vertex x^0 , which is called the root. According to well-known theorems, this can be reconstituted as a Cayley tree [1,2,3]. The second neighbors $> x, y <$ is called one-level neighbors, if vertices x and y belong to W_n for some n , that is if they situated on the same level. We will consider only one-level second neighbours. In the SOS model, spin variables $\sigma(x)$ take their values on a discrete set $\Phi = \{0, 1, \dots, m\}$ which are associated with each vertex of the tree. The SOS model with competing two binary interactions is defined by the following Hamiltonian:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_1 \sum_{> x, y <} |\sigma(x) - \sigma(y)|,$$

where the sum in the first term ranges all nearest neighbours, second sum ranges all one-level second neighbours, and $J, J_1 \in \mathbb{R}$.

Let Λ be a finite subset of V . Denote by $\sigma(\Lambda)$ the restriction of σ to Λ and let $\bar{\sigma}(V \setminus \Lambda)$ be a fixed boundary configuration. The total energy of $\sigma(\Lambda)$ under condition $\bar{\sigma}(V \setminus \Lambda)$ is defined as

$$\begin{aligned} H(\sigma(\Lambda) | \bar{\sigma}(V \setminus \Lambda)) = & -J \sum_{\langle x, y \rangle: x, y \in \Lambda} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_1 \sum_{> x, y <: x, y \in \Lambda} |\sigma(x) - \sigma(y)| \\ & - J \sum_{\langle x, y \rangle: x \in \Lambda, y \notin \Lambda} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \end{aligned}$$

Then partition function $Z_\Lambda(\bar{\sigma}(V \setminus \Lambda))$ in volume Λ boundary condition $\bar{\sigma}(V \setminus \Lambda)$ is defined as

$$Z_\Lambda(\bar{\sigma}(V \setminus \Lambda)) = \sum_{\sigma(\Lambda) \in \Omega(\Lambda)} \exp(-\beta H_\Lambda(\sigma(\Lambda) | \bar{\sigma}(V \setminus \Lambda))),$$

where $\Omega(\Lambda)$ is the set of all configurations in volume Λ and β is the inverse of temperature.

We consider the configuration $\sigma(V_n)$ and the partitions functions Z_{V_n} in volume V_n and for the sake of simplicity, we denote them as σ_n and $Z^{(n)}$, respectively. The partitions functions $Z^{(n)}$ can be written as follows:

$$Z^{(n)} = \sum_{i=0}^m Z_i^{(n)}, \quad (1)$$

where

$$Z_i^{(n)} = \sum_{\sigma_n \in \Omega(V_n): \sigma(x^0) = i} \exp(-\beta H_{V_n}(\sigma | \bar{\sigma}(V \setminus V_n))). \quad (2)$$

We will restrict ourselves to the case $m = 2$ and $k = 2$.

Denote

$$\theta = \exp(\beta J), \theta_1 = \exp(\beta J_1), \quad i = 0, 1, 2.$$

Let $S(x^0) = \{x^1, x^2\}$. If $\sigma(x^0) = i, \sigma(x^1) = j$ and $\sigma(x^2) = m$, then from (1) and (2), we have

$$Z_i^{(n)} = \sum_{j,m=0}^2 \exp(\beta J |i-j| + \beta J |i-m| + \beta J_1 |j-m|) Z_j^{(n-1)} Z_m^{(n-1)}, \quad i = 0, 1, 2.$$

After denoting $u_n = \frac{Z_1^{(n)}}{Z_0^{(n)}}$, $v_n = \frac{Z_2^{(n)}}{Z_0^{(n)}}$, we have the system of recurrent

equations:

$$\begin{cases} u_n = \frac{\theta^2 + 2\theta\theta_1 u_{n-1} + 2\theta^2\theta_1^2 v_{n-1} + u_{n-1}^2 + 2\theta\theta_1 u_{n-1} v_{n-1} + \theta^2 v_{n-1}^2}{1 + 2\theta\theta_1 u_{n-1} + 2\theta^2\theta_1^2 v_{n-1} + \theta^2 u_{n-1}^2 + 2\theta^3\theta_1 u_{n-1} v_{n-1} + \theta^4 v_{n-1}^2} \\ v_n = \frac{\theta^4 + 2\theta^3\theta_1 u_{n-1} + 2\theta^2\theta_1^2 v_{n-1} + \theta^2 u_{n-1}^2 + 2\theta\theta_1 u_{n-1} v_{n-1} + v_{n-1}^2}{1 + 2\theta\theta_1 u_{n-1} + 2\theta^2\theta_1^2 v_{n-1} + \theta^2 u_{n-1}^2 + 2\theta^3\theta_1 u_{n-1} v_{n-1} + \theta^4 v_{n-1}^2}. \end{cases}$$

If $u = \lim u_n$ and $v = \lim v_n$ then

$$\begin{cases} u = \frac{\theta^2 + 2\theta\theta_1 u + 2\theta^2\theta_1^2 v + u^2 + 2\theta\theta_1 uv + \theta^2 v^2}{1 + 2\theta\theta_1 u + 2\theta^2\theta_1^2 v + \theta^2 u^2 + 2\theta^3\theta_1 uv + \theta^4 v^2}, \\ v = \frac{\theta^4 + 2\theta^3\theta_1 u + 2\theta^2\theta_1^2 v + \theta^2 u^2 + 2\theta\theta_1 uv + v^2}{1 + 2\theta\theta_1 u + 2\theta^2\theta_1^2 v + \theta^2 u^2 + 2\theta^3\theta_1 uv + \theta^4 v^2}. \end{cases} \quad (3)$$

We have the following result:

Theorem 1. *There is a bijection between the solutions of the system of nonlinear equations (3) and translation-invariant Gibbs measures.*

References.

- [1] Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. // World scientific. – 2013.
- [2] Georgii H.-O. Gibbs measures and phase transitions // W. de Gruyter. – 1988.
- [3] Ganikhodjaev N., Akin H., Temir S. Potts model with two competing binary interactions.// Turk J. Math. –2007. V 31. – pp. 229-238.

4-PERIODIC GRADIENT GIBBS MEASURES OF AN SOS MODEL

¹Rozikov U.A., ²Toshpulatova M.

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: rozikovu@yandex.ru

We consider models where spin-configuration σ is a function from the vertices of the Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ to the set $\mathbb{Z}$ of integer numbers, where V is the set of vertices and L is the set of edges of the tree (see Chapter 1 of [1] for properties of Cayley tree).

We consider solid-on-solid (SOS) model defined by the Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \in L \\ x,y \in V}} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

where $J > 0$ and for $\sigma: x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \mathbb{Z}$.

We are interested to 4-periodic gradient Gibbs measures (GMMs) of the SOS model. For detailed definitions and other periodic GGMs we refer to [2] and [3].

It is known (see [2]) that a GGM corresponds to a boundary law satisfying an infinite system of functional equations. For 4-periodic mirror symmetric GGMs the coordinates of boundary laws (which are independent from vertices of the Cayley tree and are infinite-dimensional vectors $u = (u_1, u_2, \dots)$) should be 4-periodic as

$$u_1, 1, u_1, u_2, u_1, 1, u_1, u_2, u_1, 1, \dots$$

Moreover, denoting $x := u_1, y := u_2$ they should satisfy the following system ([3])

$$\begin{aligned} x &= (2x - \tau)y^k + \tau y - x \\ y &= (2x - \tau)x^k + \tau x - 1, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\tau = \tau(J) > 2$ is a function of parameter $J > 0$.

Note that $y = 1$ is a solution of the first equation of (2), independently on values of x . But this solution gives a 2-periodic sequence. Therefore, we assume $y \neq 1$ and define

$$f(y) = \frac{\tau y(1+y+\dots+y^{k-2})}{2(1+y+\dots+y^{k-1})}, \quad g(x) = (2x - \tau)x^k + \tau x - 1. \quad (3)$$

Then the system (2) can be written as

$$x = f(g(x)). \quad (4)$$

It seems difficult to solve this equation for $k \geq 3$. We find explicitly the following positive solutions of (4) for $k = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\tau) = \frac{1}{4}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\tau + 4\sqrt{\tau^2 - 4\tau}}), \\ x_2 &= x_2(\tau) = \frac{1}{4}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\tau + 4\sqrt{\tau^2 - 4\tau}}), \\ x_3 &= x_3(\tau) = \frac{1}{4}(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\tau - 4\sqrt{\tau^2 - 4\tau}}), \\ x_4 &= x_4(\tau) = \frac{1}{4}(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\tau - 4\sqrt{\tau^2 - 4\tau}}), \end{aligned} \quad \text{for } \tau \geq 4; \text{ and} \quad (5)$$

Since to each q -periodic boundary law corresponds a GGM we obtain the following main result:

Theorem 1. *For the SOS model (1) on the Cayley tree of order $k = 2$ the following assertions hold*

1. For $\tau \in (4, 2(1+\sqrt{5}))$ there are exactly two 4-height-periodic mirror symmetric GGMs;
2. If $\tau = 1(1+\sqrt{5})$ then there are exactly three 4-height-periodic mirror symmetric GGMs;
3. If $\tau > 2(1+\sqrt{5})$ then there are exactly four such GMMs.

We note that GGMs mentioned in this theorem correspond to the solutions (5).

References.

[1] U.A. Rozikov: Gibbs measures on Cayley trees. *World Sci. Publ.* Singapore. 2013.

[2] R. Henning, C.Kulske, A. Le Ny and U.A.Rozikov: Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, *Electron. J. Probab.* 24 (2019), Paper № 104, 23 pp.

[3] U.A. Rozikov: Mirror symmetry of height-periodic gradient Gibbs measures of an SOS model on Cayley trees. *Jour. Stat. Phys.* 188(3) (2022), 16 pages.

EVKLID FAZOSIDA BERILGAN SUBMERSIYALAR GEOMETRIYASI HAQIDA

Salimova G., Sharipov A.

O'zbekiston milliy universiteti, Toshkent, O'zbekiston

e-mail: asharipov@inbox.ru

Qatlamlarning muhim sinfi - submersiyalar hosil qilgan qatlamlar sinfidir. Ko'plab tadqiqotlar submersiyalar hosil qilgan qatlamlarning geometriyasi va topologiyasini o'rganishga bag'ishlangan.

Endi $0 \leq k \leq nC^s$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun k son qaraylik.

Ta'rif. [1] Berilgan M ko'pxillikning chiziqli bog'lanishli qism to'plamlaridan iborat $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ oila quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

$$(F_1): \bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M;$$

$(F_2): \alpha \neq \beta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $\alpha, \beta \in B$ indexlar uchun $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ munosabat o'rinli;

$(F_3):$ har bir $p \in M$ nuqta uchun $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^s$, $p \in U_\lambda$ shunday local koordinatalarni tanlash mumkin bo'lsaki, agar biror $\alpha \in B$ uchun $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \emptyset$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ to'planning chiziqli bog'lanishlilik komponentalarini $\{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda): x^{k+1} = c^{k+1}, x^{k+2} = c^{k+2}, \dots, x^n = c^n\}$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, M ko'pxillikda k o'lchamli silliq qatlama berilgan deyiladi, bu yerda $c^{k+1}, c^{k+2}, \dots, c^n$ sonlar chiziqli bog'lanishlilik komponentalarda o'zgarmas sonlar.

Qaralayotgan L_α to'plam F qatlamaning qatlami deyiladi. Ushbu holatda k o'lchamli C^s qatlama ko o'lchami $q = n - k$ ga teng bo'lgan qatlama ham deyiladi.

Silliq M ko'pxillikda F qatlama berilgan bo'lsa, bunday ko'pxillik qatlamali ko'pxillik deyiladi va (M, F) kabi belgilanadi.

Submersiyalardan hosil qilingan qatlamalar sinfi qatlamalarning muhim sinflaridan biri hisoblanadi.

Ta'rif. Rangi maksimal bo'lgan differensiallanuvchi $f : M \rightarrow B$ akslantirish uchun $n > m$ shart bajarilsa, u submersiya deyiladi, bu yerda M, B o'lchamlari mos ravishda n va m ga teng bo'lgan silliq ko'pxilliklar.

Bizga $f : R^n \rightarrow R^m$ submersiya berilgan bo'lsin, bu yerda, $n > m$. U holda R^n da $k = n - m$ o'lchamli F qatlama hosil bo'ladi, qatlamlari $L_p = f^{-1}(p), p \in R^m$ to'plamlardan iborat.

Misol. $R^3(x, y, z)$ fazoni Oxy tekisligiga proyeksiyasi Riman submersiyasi bo'ladi: $f : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$. Bu akslantirishni differensial $J(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Yakobi matritsasini beradi. Gorizontall vektori $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Akslantirishning differensial df , v vektorni $df(v) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vektorga o'tkazadi.

Ma'lumki $|df(\vec{v})| = |\vec{v}|$.

Submersiyalar hosil qilgan qatlamalar sinfi qatlamalarning muhim sinfi hisoblanadi. Rang haqidagi teorema ko'ra har qanday $f : M \rightarrow B$ submersiya M ko'pxillikda qatlamlari $L_p = f^{-1}(p), p \in B$ qism ko'pxilliklardan iborat $k = n - m$ o'lchamli F qatlamani hosil qiladi, bu yerda n, m mos ravishda M, B ko'pxilliklarning o'lchamlari va $n > m$.

Ta'rif. Berilgan $f : M \rightarrow B$ submersiyaning differensial df gorizontall vektorlarning uzunligini saqlagan holda akslantirsa, u holda bu submersiya Riman submersiyasi deyiladi.

Birinchi paragrafda Riman submersiyalari hosil qilgan qatlamalarning seksion egriligi tadqiq qilingan, jumladan, Riman submersiyalari hosil qilgan qatlamalarning geometriyasini ifodalovchi teorema isbotlangan. Riman submersiyasidan hosil bo'lgan qatlamalarning qatlamlari o'zgarmas Gauss egrilikli ko'pxilliklar bo'lishi ko'rsatilgan.

Ph. Tondeurning [2] ishida har bir vertikal X vektor maydon uchun $X\left(\left|gradf\right|^2\right)=0$ munosabat o‘rinli bo‘ladigan funksiyalar sath sirtlarining geometriyasi o‘rganilgan.

Biz $f:M \rightarrow B$ submersiyalarni B ko‘pxillik bir o‘lchamli bo‘lgan holda qaraymiz, aniqrog‘i, $f:M \rightarrow R$ silliq funksiyani qaraymiz. Agar $Crit\{f\}$ - qaralayotgan f funksiyaning barcha kritik nuqtalari to‘plami bo‘lsa, u holda $M \setminus Crit\{f\}$ ko‘pxillikda qatlamlari f funksiyaning sath sirtlaridan iborat $n-1$ o‘lchamli (yoki ko‘lchami birga teng bo‘lgan) F qatlama hosil bo‘ladi.

Teorema. Bizga $f:R^n \rightarrow R^1$ riman submersiyasi berilgan bo‘lsin. U holda, riman submersiyasi (f funksiya sath sirtlari) hosil qilgan F qatlamaning har bir qatlami Gauss egriligi o‘zgarmas gipersirtidan iborat bo‘ladi.

Adabiyotlar

[1] Tamura I. Topology of foliations: an introduction// Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., – 2006.

[2] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds// Springer Verlag, – New York, – 1988.

SEMIGROUP OF ELEMENTS OF CENTRAL EXTENSIONS OF VON NEYMANN ALGEBRAS

^{1,2}*Seypullaev J.X., ²Ongarbaev R.O.*

¹*V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

²*Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan*

e-mail: jumabek81@mail.ru, raximongarbaev7@gmail.com

The present paper is devoted to the study of semigroup properties of elements of central extensions of von Neumann algebras.

Let H be a complex Hilbert space and let $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on H . Consider a von Neumann algebra M in $B(H)$ with the operator norm $\|\cdot\|_M$. Denote by $P(M) = \{p \in M : p^2 = p = p^*\}$ the lattice of projections in M .

A linear subspace $\mathcal{D}$ in H is said to be affiliated with M (denoted as $\mathcal{D} \eta M$), if $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ for every unitary u from the commutant

$$M' = \{y \in B(H) : xy = yx, \forall x \in M\}$$

of the von Neumann algebra M .

A linear operator x on H with the domain $\mathcal{D}(x)$ is said to be *affiliated* with M (denoted as $x \eta M$) if $\mathcal{D}(x) \eta M$ and $u(x(\xi)) = x(u(\xi))$ for all $\xi \in \mathcal{D}(x)$.

A linear subspace $\mathcal{D}$ in H is said to be *strongly dense* in H with respect to the von Neumann algebra M , if

1) $\mathcal{D}\eta M$;

2) there exists a sequence of projections $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ in $P(M)$ such that $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(H) \subset \mathcal{D}$ and $p_n^\perp = \mathbf{1} - p_n$ is finite in M for all $n \in \mathbb{N}$, where $\mathbf{1}$ is the identity in M .

A closed linear operator x acting in the Hilbert space H , is said to be *measurable* with respect to the von Neumann algebra M , if $x\eta M$ and $\mathcal{D}(x)$ is strongly dense in H . Denote by $S(M)$ the set of all measurable operators with respect to M .

A closed linear operator x in H is said to be *locally measurable* with respect to the von Neumann algebra M , if $x\eta M$ and there exists a sequence $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ of central projections in M such that $z_n \uparrow \mathbf{1}$ and $z_n x \in S(M)$ for all $n \in \mathbb{N}$.

It is well-known [1] that the set $LS(M)$ of all locally measurable operators affiliated with M is a unital $*$ -algebra when equipped with the algebraic operations of strong addition and multiplication and taking the adjoint of an operator, and contains $S(M)$ as a solid $*$ -subalgebra.

By $E(M)$ we denote the set of all elements x from $LS(M)$ for which there exists a sequence of mutually orthogonal central projections $\{z_i\}_{i \in I}$ in M with $\bigvee_{i=1}^\infty z_i = \mathbf{1}$ such that $z_i x \in M$ for all $i \in I$, i.e.

$$E(M) = \{x \in LS(M) : \exists z_i \in P(Z(M)), z_i z_j = 0, i \neq j, \bigvee_{i \in I} z_i = \mathbf{1}, z_i x \in M, i \in I\}$$

where $Z(M)$ is the center of M .

It is known [2] that if M is a von Neumann algebra with center $Z(M)$, then $E(M)$ it is a $*$ -algebra in $LS(M)$ with center $Z(S(M))$, where $Z(S(M))$ is the algebra of measurable operators with respect to $Z(M)$, $LS(M) = E(M)$ if and only if M does not have direct summands of type II.

Note that an element $x \in LS(M)$ belongs to $E(M)$ if and only if there exists $f \in S(Z(M))$ such that $|x| \leq f$. Therefore for any $x \in E(M)$ there exists the following vectorvalued norm

$$\|x\| = \inf \{ f \in S(Z(M)) : |x| \leq f \}.$$

A family $\{x_t\}_{t \in [0; +\infty)}$ is called a semigroup of elements of the algebra $E(M)$ if the following conditions are satisfied:

$$x_0 = \mathbf{1} \text{ and } x_{t+s} = x_t x_s,$$

for all $t, s \in [0; +\infty)$.

The main result of the work is the following.

Theorema. Let $\{x_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ be a semigroup of elements of the algebra $E(M)$. Then the following conditions are equivalent:

1) x_t is uniformly continuous at 0, i.e.

$$(o) - \lim_{t \rightarrow 0} \|x_t - 1\| = 0;$$

2) x_t is uniformly differentiable as $t = 0$, i.e., there is an element $y \in E(M)$ such that

$$(o) - \lim_{t \rightarrow 0} \|(x_t - 1) / t - y\| = 0$$

3) there is an element $y \in E(M)$ such that

$$x_t = (o) - \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} y^n$$

Literature

[1] Muratov M.A., Chilin V.I. *Algebras of measurable and locally measurable operators*. Institute of Mathematics Ukrainian Academy of Sciences. - Kiev. - 2007.

[2] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. *Additive derivations on algebras of measurable operators*. J. Operator Theory. - 2012. - Vol. 67. - P. 495-510

NOCHIZIQLI ALMASHTIRISHDA SIRTNING GAUSS EGRILIGI SAQLANISHI

Sultanov B.M., Axmedov I.

Urganch davlat universiteti, Urganch, Uzbekiston

e-mail: bek_4747@bk.ru

Uch o'ldovli affin fazo A_3 , koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo'lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – bu fazodning bazis vektorlari bo'lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

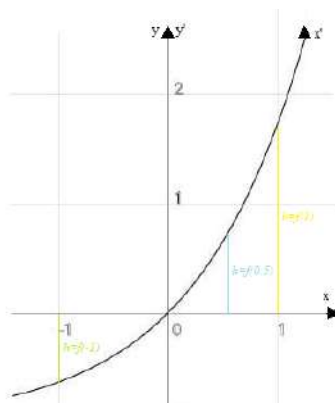
$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, \text{ agar } x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, \text{ agar } x_1x_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ta'rif. $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi [1].

(1) skalyar ko'paytma majrux skalyar ko'paytma deyiladi. Majrux skalyar ko'paytmasi psevdovklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo'ladi [2].

Quyidagi nochiziqli almashtirishni qaraylik:

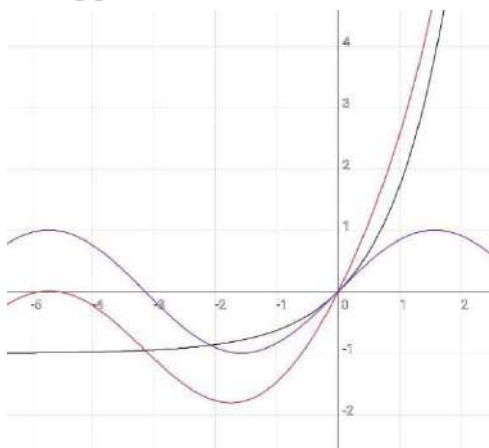
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = f(x) + y \end{cases} \quad (2)$$



1-rasm.

Bu almashtirishda Oy o'qidagi nuqtalari o'zgarmasdan, $x' = x_0 \neq 0$ barcha qolgan nuqtalari Oy o'qiga parallel $h = f(x_0)$ masofaga sirpanadi (1-rasm).

Tasdiq. Tekislikda (2) noxiziqli almashtirish bajarilganda har qanday $y(x)$ chiziq $y'(x) = y(x) + f(x)$ chiziqqa o'tadi (2-rasm).



2-rasm.

Biz (2) noxiziqli almashtirishda saqlanadigan kattaliklarni o'rganamiz. Bizga

$$r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad (3)$$

biror regulyar sirtning vektor formadagi tenglamasi berilgan bo'lsin.

Ma'lumki, (1) tenglamaning berilgan (u_0, v_0) nuqtadagi bosh egriliklarining ko'paytmasiga berilgan sirtning shu nuqtadagi to'la (Gauss) egriligi deyiladi va u K orqali belgilanadi [3]:

$$K = k_1 k_2 = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2},$$

bu yerda, E, F, G, D, D', D'' lar birinchi va ikkinchi kvadratik formaning koeffitsientlari.

Teorema. (2) noxiziqli almashtirishda regulyar sirtning to'la (Gauss) egriligi o'zgarmaydi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, sirtning egri chiziqli koordinatalar sistemasida (2) almashtirish bajarilganda sirtning Gauss egriligi o'zgarmas ekan.

Egri chiziqli koordinatalar sistemasidagi (2) almashtirish Yevklid fazosida shu sirt bilan chegaralangan jismning defarmatsiyasini beradi. Demak bu defarmatsiyada sirtning Gauss egriligi o'zgarmas ekan.

Natija. Ushbu (3) shaklda berilgan regulyar sirt (2) chiziqli almashtirish bajarganda, sirt ustidagi soha yuzasining qiymati o'zgarmaydi.

Литература

[1]. А. Артыкбоев., Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в пространстве-время. Т.:Фан.1991. 179 с.

[2]. A. Artikbaev., B.M. Sultanov. Invariants of Surface Indicatrix in a Special Linear Transformation. Mathematics and statistics. Volume 7, №4, 2019. pp. 107-119.

[3]. V.A. Toponogov., V.Y. Rovenski. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Birkhauser Boston, 2006- 214 p.

UCH YOQLI BURCHAK SHARTLI TO'LA BURCHAGINI BAHOLASH

Topvoldiyev F.F.

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston

e-mail: ftopvoldiev87@mail.ru

Berilgan geometrik xarakteristikalarga ko'ra sirlarni tiklash masalasi zamonaviy differensial geometriyaning asosiy masalalaridan biridir. Geometrik xarakteristikalar ichki egrilik, tashqi yoki Gauss egriligi va sirt bilan bog'liq boshqa kattaliklar bo'lishi mumkin.

Sirt (2), xususan qavariq ko'pyoqlikni tashqi egrilik bo'yicha tiklash masalasi birinchi marta A.D.Aleksandrov tomonidan 1942-yilda yechilgan [1]. U ko'pyoqlikning tashqi egriligi sifatida ko'pyoqlikning har bir uchidagi sferik tasvir yuzalari yig'indisini olgan. Noyevklid fazolarning qaysilarida berilgan xarakteristikalariga ko'ra sirlarni tiklash mumkinligi masalasi A.Ortiqboyev tomonidan hal qilingan [2].

Uch o'lchamli yevklid fazosida F sirt (2) va nolga teng bo'lmagan $\vec{e}$ vektorni (yo'nalishni) qaraymiz. Biz F sirt (2)ni $\vec{e}$ vektorga perpendikulyar mumkin bo'lgan barcha π^j tekisliklar bilan kesamiz. Kesimdagi nuqtalari to'plamini $\gamma^j = F \cap \pi^j$ bilan belgilaymiz. γ^j kesimlari kesmaga, to'g'ri chiziqqa yoki aylanaga gomeomorf bo'lgan sirtlar sinfini biz $W\{\vec{e}\}$ bilan belgilaymiz. $\vec{e}$ vektorning yo'nalishni OX o'qiga parallell va shu o'q yo'nalishida bo'lsin.

Uchi koordinata boshida, $\vec{e}$ vektorga perpendikulyar tayanch tekisligi va qirralari bo'lmagan uch yoqli burchakning qirralari a, b, c bo'lsin, bunday uch yoqli burchakni S_3 bilan belgilaymiz. $x=1$ tekislik S_3 ning b va c qirralarni kesib o'tsin va kesishish nuqtalarini mos holda B va C bilan belgilaymiz. a

qirrani davom ettirib, uning $x=1$ tekislik bilan kesishgan nuqtasini A bilan belgilaymiz. A, B, C nuqtalarni tutashtirib, ABC uchburchakni hosil qilamiz.

Ta’rif. ABC uchburchak tomonlarining A burchagiga nisbatan defekti deb

$$\omega_{ABC}(A) = AB + AC - BC$$

songa aytiladi [2].

Ta’rif. Uch yoqli burchak S_3 ning $\vec{e}(OX)$ -yo‘nalishdagi shartli to‘la burchagi deb ABC uchburchak tomonlarining A burchakka nisbatan defektiga aytiladi [3].

Uch yoqli burchakning qirralaridan biri (umumiylikni chegaralamagan holda c qirradi) $\vec{e}$ vektorga perpendikulyar bo‘lsin. Bunday uch yoqli burchakni $\widetilde{S}_3$ bilan belgilaymiz. Uning shartli to‘la burchagi $\omega_{\widetilde{S}_3}$ bo‘lsin.

Teorema. $\widetilde{S}_3$ ning shartli to‘la burchagi $\omega_{\widetilde{S}_3}$ musbat aniqlangan va chegaralangan.

Adabiyotlar

[1] Александров А. Д. Существование и единственность выпуклой поверхности с заданной интегральной кривизной. Докл. АНУССР. — 1942. —35, №5. —С. 143–147.

[2] Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени. Ташкент, ФАН, 1990. 180 с.

[3] Sharipov A. S. Topvoldiyev F. F. On some properties of surfaces with isometric on sections. Bulletin of the Institute of Mathematics. № 1, Vol.4, pp. 11-15, 2021.

LOCAL DERIVATIONS OF THE THIN LIE ALGEBRAS

¹*Yusupov B.B., ¹Vaisova N.Z., ²Yusupov F.A.*

¹ *Institute of Mathematics, Urgench, Uzbekistan*

² *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

e-mail: baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

Investigation of local derivations on Lie algebras was initiated in paper in [1]. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. In [2] local derivations and automorphism of complex finite-dimensional simple Leibniz algebras are investigated, and it is proved that all local derivations on a finite-dimensional complex simple Leibniz algebras are automatically derivations and it is shown that filiform Leibniz algebras admit local derivations which are not derivations. In this paper, we will study local derivations on the thin Lie algebra.

A vector space $\mathcal{L}$ over a field $\mathbb{K}$, with an operation $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, denoted $(x, y) \mapsto [x, y]$ and called the bracket or commutator of x and y , is called a Lie algebras over $\mathbb{K}$ if the following axioms are satisfied:

- The bracket operation is bilinear.
- $[x, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}$.
- $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \forall x, y, z \in \mathcal{L}$.

A derivation on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz law, that is,

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

for all $x, y \in \mathcal{L}$. The set of all derivations of $\mathcal{L}$ with respect to the commutation operation is a Lie algebra and it is denoted by $Der(\mathcal{L})$. For all $a \in \mathcal{L}$, the map $ad(a)$ on $\mathcal{L}$ defined as $ad(a)x = [a, x], x \in \mathcal{L}$ is a derivation and derivations of this form are called *inner derivation*.

A linear operator Δ is called a *local derivation*, if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_x: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$. The set of all local derivations on $\mathcal{L}$ we denote by $LocDer(\mathcal{L})$.

Let us consider the following so-called thin Lie algebras with a basis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, which are defined by the following tables of multiplications of the basis elements[3]:

- $\mathcal{L}_1 : [e_1, e_n] = e_{n+1}, \quad n \geq 2$.
- $\mathcal{L}_2 : [e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad i \geq 2$ and $[e_2, e_j] = e_{j+2}, \quad j \geq 3$,

and other products of the basis elements being zero. The following proposition describes derivations of the algebras $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$.

Proposition 1[4]. Any derivation D of the algebra $\mathcal{L}_1$ has the following form:

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \\ D(e_2) &= \sum_{i=2}^n \beta_i e_i, \\ D(e_j) &= ((j-2)\alpha_1 + \beta_2)e_j + \sum_{i=1}^n \beta_{i+2} e_{i+j}, \quad j \geq 3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n$, and $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2[5]. Every derivation D on the algebra $\mathcal{L}_2$ has the following form:

$$\begin{aligned} D(e_1) &= a_1 e_1 + \sum_{i=3}^n a_i e_i, \\ D(e_2) &= 2a_1 e_2 + b_3 e_3 + \sum_{i=1}^n (c_i + a_{i+2}) e_{i+3}, \end{aligned}$$

$$D(e_j) = ja_1e_j + b_3e_{j+1} + \sum_{i=1}^n c_ie_{i+j+1}, \quad j \geq 3,$$

where $a_i, b_3, c_i = b_{i+3} - a_{i+2} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, and $n \in \mathbb{N}$.

Now we give the main theorem concerning local derivations on the thin Lie algebras.

Theorem 3. *Let Δ be a linear operator on $\mathcal{L}_1$. Then Δ is a local derivation, if and only if it has the form:*

$$\Delta(e_j) = \sum_{i=j}^n \gamma_{i,j} e_i, \quad j \geq 1,$$

where $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 4. *Let Δ be a linear operator on $\mathcal{L}_2$. Then Δ is a local derivation, if and only if it has the form:*

$$\Delta(e_1) = \gamma_{1,1} e_1 + \sum_{i=3}^n \gamma_{i,1} e_i,$$

$$\Delta(e_j) = \sum_{i=j}^n \gamma_{i,j} e_i, \quad j \geq 2,$$

where $n \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, *Local derivations on finite-dimensional Lie algebras*, Linear and Multilinear Algebra, 2016, Vol.493, p. 381–388.

[2] Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, B.A. Omirov, *Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2020, pp.2199–2234.

[3] K. Khakimdjanova, Yu. Khakimdjnov, *Sur une classe d'algèbres de Lie de dimension infinie*, Commun. Algebra, Vol.29(1) (2001), 177-191.

[4] Sh. A. Ayupov, B. B. Yusupov, *2-Local derivations of infinite-dimensional Lie algebras*, Journal of Algebra and its Applications, 19 05 (2020), 2050100

[5] Sh. A. Ayupov, B. B. Yusupov, *2-local derivations on Virasoro algebras*, Bull. Nat. Univ. Uzbekistan. Math. Natural Sci., 4 (2019), 217-230.

КЛАССИЧЕСКИЕ r -МАТРИЦЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ РАЗРЕШИМОЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Айтмуратов А., Курбанбаев Т.

*Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
e-mail: tuuelbay@mail.ru, ajiniyazaytmuratov4@mail.com*

В этой заметке изучено классические r -матрицы для трехмерной разрешимой алгебр Лейбница. Основная задача: классифицировать классические r -матрицы с точностью до эквивалентности.

Пусть L алгебра Лейбница над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $R: L \rightarrow L$ – линейный оператор.

Определение 1. Алгебра L над полем $\mathbb{F}$ называется *алгебрам Лейбница*, если для всех $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ умножение в L .

Для алгебры Лейбница L рассмотрим следующим производный ряд:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k]} = [L^{[k-1]}, L^{[k-1]}], \quad k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L называется *разрешимой*, если существует натуральный $m \geq 1$ такое, что $L^{[m]} = 0$.

Определение 2. Линейный оператор $R: L \rightarrow L$ называется классической r -матрицы (для алгебр Лейбница), если умножение

$$[x, y]_R = \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry]) \quad (1)$$

удовлетворяет тождеству Лейбница.

Определение 3. Будем говорить, что две классические r -матрицы R_1 и R_2 эквивалентны, если существует $\varphi \in \text{Aut}(L)$ такой, что $R_1 = \varphi R_2 \varphi^{-1}$.

Приведем таблица умножения трехмерных разрешимых комплексных алгебр Лейбница, которые классифицировано в [АуировОмиров]:

$L_1(\alpha) \quad \alpha \neq 0$:	$[e_1, e_3] = \alpha e_1; [e_2, e_3] = e_1 + e_2; [e_3, e_3] = e_1;$
$L_2:$	$[e_3, e_3] = e_1; [e_2, e_3] = e_1 + e_2;$
$L_3:$	$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_3] = -2e_3; [e_2, e_1] = -e_3; [e_2, e_3] = 2e_3;$ $[e_3, e_1] = 2e_3; [e_3, e_2] = -2e_3;$
$L_4(\alpha):$	$[e_1, e_3] = \alpha e_1; [e_3, e_2] = e_2; [e_2, e_3] = -e_2; [e_3, e_3] = e_1;$
$L_5:$	$[e_1, e_3] = e_1; [e_2, e_3] = e_1; [e_3, e_3] = e_1;$
$L_6:$	$[e_1, e_3] = e_2; [e_3, e_3] = e_1;$
$L_7:$	$[e_1, e_2] = e_1; [e_3, e_2] = e_1; [e_3, e_3] = e_1; [e_1, e_3] = e_1;$
$L_8:$	$[e_1, e_1] = e_2; [e_2, e_1] = e_2;$
$L_9(\alpha):$	$[e_1, e_2] = e_2; [e_2, e_1] = -e_2; [e_1, e_3] = \alpha e_3; [e_3, e_1] = -\alpha e_3;$ $\alpha \neq 0, 1,$
$L_{10}:$	$[e_1, e_1] = e_2; [e_2, e_1] = -e_2;$
$L_{11}:$	$[e_3, e_3] = \alpha e_1; [e_2, e_3] = e_1; [e_2, e_2] = e_1;$

Пусть оператор $R: L \rightarrow L$ имеет вид $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$.

Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. В трехмерных разрешимых алгебрах Лейбница оператор R является классической r -матрицей тогда и только тогда, когда выполнено следующие условия:

Алгебры	условия
$L_1(\alpha), \alpha \neq 0$:	$r_{13} = r_{23} = 0$
L_2 :	$r_{13} = r_{23} = 0$
L_3 :	$2r_{11} - 2r_{12} - r_{32} - 2r_{21} + 2r_{22} + r_{31} = 0$,
$L_4(\alpha)$:	$r_{13} = r_{23} = 0, r_{22} = -r_{33}$
L_5 :	$r_{13} = 0$
L_6 :	$r_{13} = r_{23} = 0$
L_7 :	$r_{13} = 0$
L_8 :	$r_{21} = 0$
$L_9(\alpha), \alpha \neq 0, 1$:	$r_{12} = r_{13} = 0,$ $(r_{11} + r_{22})^2 + \alpha r_{23} r_{32} = 0,$ $\alpha(r_{11} + r_{33})^2 + r_{23} r_{32} = 0,$ $(r_{23} - r_{32})(r_{11} + r_{22} + \alpha(r_{11} + r_{33})) = 0$
L_{10} :	$r_{11} = -r_{22}, r_{31} = 0$
L_{11} :	$r_{12} = r_{13} = 0$

Литература

[1] Ayupov Sh.A., Omirov B.A., On 3-dimensional Leibniz algebras, *Uzbek Math. Journal*, 1999, 9–14.

[2] Semenov-Tyan-Shanskii M. A., What is a classical R-matrix? *Funktsional. Anal. i Prilozhen* 17(4) (1983) 17–33.

2-ЛОКАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

¹Алаўатдинова У.М., ^{1,2}Алаудинов А.К.

¹Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

²Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук
Узбекистана

e-mail: ulzadaalauatdinova@gmail.com

Алгебры Лейбница представляют собой «неантисимметричное» расширение алгебр Ли. В последние десятилетия ряд работ был посвящен структурной теории и классификации конечномерных алгебр Лейбница. Некоторые классические теоремы из теории алгебр Ли были расширено до случай алгебр Лейбница. За некоторыми подробностями теории алгебр Лейбница мы отсылаем к статьям [1, 2]. В частности, для конечномерной

простой алгебры Лейбница над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики дифференцирования были недавно описаны в [4]. В работе [3] показано, что все локальные дифференцирования и 2-локальные дифференцирования на конечномерной простой алгебре Лейбница автоматически являются дифференцированиями.

В этой работе мы изучаем 2-локальные внутренние дифференцирования конечномерных простых комплексных алгебр Лейбница.

Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[,]$ – умножение в L .

Пусть L – алгебра Лейбница, а I – идеал, порожденный квадратами в $L: I = \text{id}\langle [x, x] \mid x \in L \rangle$. Алгебра Лейбница L называется простой, если ее идеалами являются только $\{0\}, I, L$ и $[L, L] \neq I$.

Дифференцирование алгебры Лейбница L – это линейное отображение $D: L \rightarrow L$, удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

для любого $x, y \in L$. Пусть a – элемент алгебры Лейбница L . Рассмотрим оператор $R_a: L \rightarrow L$, определенный $R_a(x) = [x, a]$. Этот оператор является дифференцированием и называется внутренним дифференцированием.

Оператор Δ (не обязательно линейный) называется 2-локальным внутренним дифференцированием, если для любого $x, y \in L$ существует внутреннее дифференцирование $R_{a_{x,y}}: L \rightarrow L$ (зависящее от x и y) такое, что

$$\Delta(x) = R_{a_{x,y}}(x) \text{ и } \Delta(y) = R_{a_{x,y}}(y).$$

Теорема. Пусть L – конечномерная комплексная простая алгебра Лейбница. Тогда каждое 2-локальное внутреннее дифференцирование на L является внутренним дифференцированием.

Литературы

- [1] Albeverio S., Ayupov Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras, Commun. Algebra 33, 159–172 (2005)
- [2] Albeverio S., Ayupov, Sh.A., Omirov B. Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length $(n - 1)$ and their derivations, J. Algebra 319, 2471–2488 (2008)
- [3] Ayupov Sh.A., · Kudaybergenov K.K., · Omirov B.A. Local and 2-Local Derivations and Automorphisms on Simple Leibniz Algebras, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2020) 43:2199–2234
- [4] Rakhimov I.S., Masutova K.K., Omirov B.A. On derivations of semi-simple Leibniz algebras, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 40, 295–306 (2017)

ЛОКАЛЬНЫЕ И 2-ЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ АЛГЕБРЫ ОКУБО

Алламбергенов А.Х.

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз

e-mail: allayar2010@mail.ru

Пусть A - алгебра (не обязательно ассоциативная). Напомним, что линейное отображение $D:A \rightarrow A$ называется дифференцированием, если $D(xy)=D(x)y + xD(y)$ для всех $x, y \in A$. Напомним, что линейное отображение Δ называется локальным дифференцированием, если для каждого $x \in A$ существует дифференцирование D_x на A (зависящий от x) такой, что $\Delta(x)=D_x(x)$.

Эти понятия были введены и независимо исследованы Р.В. Кадисоном [2], Д. Ларсоном и А. Сурором [3].

В 1997 г. П. Шемрл [4] ввел понятие 2-локальных дифференцирований. Напомним, что отображение $\Delta:A \rightarrow A$ (не обязательно линейное) называется 2-локальным дифференцированием, если для каждой пары $x, y \in A$ существует дифференцирование $D_{x,y}:A \rightarrow A$ (в зависимости от x, y) такие, что $\Delta(x)=D_{x,y}(x)$, $\Delta(y)=D_{x,y}(y)$.

В [4] П. Шемрл описал 2-локальные дифференцирования на алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H , доказав, что каждое 2-локальное дифференцирование на $B(H)$ является дифференцированием. Подробное обсуждение 2-локальных дифференцирований на операторных алгебрах можно найти в обзоре [1].

Последние годы внимание были обращены к изучению локальных и 2-локальных дифференцирований симметричных композиционных алгебр в которой требуется, чтобы норма была ассоциативной, т.е.

$$n(xy, z) = n(x, yz) \quad (1)$$

для всякого $x, y, z \in C$. Отметим, что (1) эквивалентно в композиционной алгебре

$$(xy)x = x(yx) = n(x)y. \quad (2)$$

Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики отличной от 2, 3. Тогда $\mathbb{F}$ содержит примитивный кубический корень ω из 1. Пусть $M_3(\mathbb{F})$ ассоциативная алгебра 3×3 – матриц над $\mathbb{F}$. Обозначим через $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ соответствующую специальную алгебру Ли. Определим новое умножение на $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ следующим образом:

$$x * y = \omega xy - \omega^2 yx - \frac{\omega - \omega^2}{3} \text{tr}(xy)1. \quad (3)$$

где tr – канонический след на $M_3(\mathbb{F})$.

Известно, что [7, стр 2481-2504]

$$(x * y) * x = x * (y * x) = \text{sr}(x)y \quad (4)$$

для любого $x, y \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$, где sr обозначает квадратичную форму, которая появляется как коэффициент X в многочлене Кэли-Гамильтона

$$\det(XI - a) = X^3 - \text{tr}(a)X^2 + \text{sr}(a)X - \det(a)$$

для $a \in M_3(\mathbb{F})$.

Известно, что (см. [6] или [5, Лемма 4.42]) $(S, *, n)$ алгебра, с невырожденной квадратичной формой n . Тогда n мультипликативна, а ее полярная форма ассоциативна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (2).

Определение. Симметричная композиционная алгебра $(\mathcal{O}, *, n)$ называется алгеброй Окубо над $\mathbb{F}$.

Известно, что [5], если $\mathbb{F}$ поле характеристики отличной от 2,3. Тогда $\text{Der}(\mathcal{O}, *)$ изоморфно алгебре $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$.

$$\text{Der}(\mathcal{O}, *) = \{ \text{ad}_x^* : y \mapsto x * y - y * x : x \in \mathcal{O} \}.$$

Теорема-1. Пусть $\mathcal{O}$ алгебра Окубо над полем F характеристики $\neq 2, 3$. Тогда всякое локальное дифференцирование алгебры Окубо $\mathcal{O}$ является дифференцированием.

Теорема-2. Пусть $\mathcal{O}$ алгебра Окубо над полем F характеристики $\neq 2, 3$. Тогда каждое 2-локальное дифференцирование $\Delta : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ является дифференцированием.

Литература

- [1] Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, A. M. Peralta, A survey on local and 2-local derivations on C^* -algebras and von Neumann algebras, in Topics in Functional Analysis and Algebra, *Contemporary Mathematics AMS*, **672** (2016) 73-126.
- [2] R.V. Kadison, Local derivations, *J. Algebra*, **130** (1990) 494-509.
- [3] D. R. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, *Proc. Sympos. Pure Math.* **51** (1990) 187-194.
- [4] P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997) 2677-2680.
- [5] Elduque A. Okubo Algebras: Automorphisms, Derivations and Idempotents, *Lie Algebras and Related Topics* (2015) 65-66.
- [6] Okubo S, Osborn J. M. Algebras with nondegenerate associative symmetric bilinear forms permitting composition, *Comm. Algebra* **9** (1981), no. 12, 1233-1261.
- [7] Elduque A., Myung H. C. On flexible composition algebras, *Comm. Algebra* **21** (1993), no. 7, 2481-2505.

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУКОНЕЧНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

Дадаходжаев Р.А.

Институт Математики имени В.И.Романовского АН РУз

e-mail: rashidkhon@mail.ru

В этой заметке дается вариант гильбертова характеризации компактных операторов относительно полуконечной вещественной алгебры фон Неймана, следуя работе [1].

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на H , $\mathfrak{R}$ – вещественная полуконечная алгебра фон Неймана на H , $\wp(\mathfrak{R})$ – множество всех проекторов из $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{I}$ – равномерно замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{R}$, порожденный конечными проекторами в $\mathfrak{R}$. Далее элементы из $\mathfrak{I}$ назовем *компактными относительно $\mathfrak{R}$ операторами*.

Известно, что 1) $\mathfrak{I}$ является собственным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ является бесконечным, 2) $\mathfrak{I}$ является максимальным двусторонним идеалом в $\mathfrak{R}$, который не содержит бесконечные проекторы. Проектор конечен относительно алгебры $B(H)$, тогда и только тогда, когда он конечен в евклидовом смысле, т.е. тогда и только тогда, когда он является конечной суммой одномерных проекторов. Последовательность $x_n \in H$ слабо сходится к элементу $x(x_n \xrightarrow{w} x)$ тогда и только тогда, когда для всех конечных проекторов P относительно $B(H)$, элемент Px_n сильно сходится к элементу $Px(Px_n \xrightarrow{s} Px)$. А это наводит к следующему обобщению:

Определение 1. Последовательность $\{x_n\} \subset H$ называется сходящейся *относительно слабо (RW)* (по отношению к вещественной алгебре фон Неймана $\mathfrak{R}$) к элементу $x(x_n \xrightarrow{RW} x)$, если

- 1) последовательность норм $\|x_n\|$ – ограничена,
- 2) для всех конечных относительно $\mathfrak{R}$ проекторов $P \in \wp(\mathfrak{R})$, $Px_n \xrightarrow{s} Px$.

Заметим, что слабо сходящаяся последовательность обязательно ограничена, но следующий пример показывает, что существуют неограниченные последовательности, которые удовлетворяют второй части определения 1.

Пример 2. Пусть H и K – бесконечномерные сепарабельные гильбертова пространства с ортонормальными базами $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ соответственно и $C(K)$ – вещественный фактор скалярных операторов вида λI_K , где $\lambda \in \mathbb{R}$, I_K – единица на K . Тогда $\mathfrak{R} = B(H) \otimes C(K)$ будет

бесконечным вещественным фактором фон Неймана типа I . Рассмотрим следующую последовательность:

$$\begin{aligned}x_1 &= e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2, \\x_2 &= e_2 \otimes f_2 + e_3 \otimes f_3 + e_4 \otimes f_4, \\x_3 &= e_3 \otimes f_3 + e_4 \otimes f_4 + e_5 \otimes f_5 + e_6 \otimes f_6, \\&\dots\dots\dots, \\x_n &= \sum_{i=n}^{2n} e_i \otimes f_i.\end{aligned}$$

Так как

$$\|x_n\|^2 = \left\langle \sum_{i=n}^{2n} e_i \otimes f_i, \sum_{j=n}^{2n} e_j \otimes f_j \right\rangle = \sum_{i,j=n}^{2n} (e_i, e_j)_H (f_i, f_j)_K = \sum_{k=n}^{2n} \|e_k\|^2 \|f_k\|^2 = n$$

последовательность $\{x_n\}$ является неограниченной.

Пусть P конечный проектор в $\mathfrak{R}$. Тогда существует конечный проектор P_0 в $B(H)$ такой, что $P = P_0 \otimes I_K$ и не теряя общности мы можем, предположить P одномерным, т.е. $P_0 = (\cdot, e)e$ для элемента $e \in H$, такой что $\|e\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\|Px_n\|^2 &= \left\langle \sum_{i=n}^{2n} P_0 e_i \otimes f_i, \sum_{j=n}^{2n} P_0 e_j \otimes f_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=n}^{2n} (e_i, e)e \otimes f_i, \sum_{j=n}^{2n} (e_j, e)e \otimes f_j \right\rangle = \\&= \sum_{i,j=n}^{2n} ((e_i, e)e, (e_j, e)e)_H (f_i, f_j)_K = \sum_{k=n}^{2n} |(e_k, e)|^2 \|e_k\|^2 \|f_k\|^2 = \sum_{k=n}^{2n} |(e_k, e)|^2.\end{aligned}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, e)|^2$ сходиться, так как (e_k, e) – не что иное, как

коэффициенты ряда Фурье, в разложении элемента e в ряд Фурье. Значит,

$\sum_{k=n}^{2n} |(e_k, e)|^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|Px_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из этих

рассуждений можно сделать вывод, что последовательности $e_n \otimes f$ и $e \otimes f_n$ сходятся к нулю, и при этом первая последовательность RW – сходится но не сходится в сильной топологии, вторая последовательность сходится в слабой топологии, но не сходится RW .

Следующая теорема является обобщенной гильбертовой характеристикой компактных операторов.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{R}$ – вещественная полуконечная алгебра фон Неймана. Оператор A является компактным относительно $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда он отображает RW – сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся последовательности.

Замечание. Конструкция представления Калкина $B(H)/\mathfrak{I}$ (см.[2]), существенно опирается на гильбертову характеристику компактных операторов в $B(H)$. Теорема 3 показывает, что в вещественных полуконечных алгебрах фон Неймана имеет место обобщенная гильбертова

характеризация компактных относительно $\mathfrak{K}$ операторов. Распространяя обобщенную гильбертову характеристику компактных относительно $\mathfrak{K}$ операторов для $\mathfrak{K}$, мы можем получить представление $\mathfrak{K} / \mathfrak{I}$.

Список литературы

[1] Kaftal V. Relative weak convergence in semifinite von Neumann algebras. // Proc. Amer. Math. Soc., V.84, N.1, 1982, p.89-94.

[2] Calkin J.W. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. // Ann.Math., 42, № 4 (1941), 839–873.

СРАВНЕНИЕ ТОПОЛОГИЙ НА ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

Джумамуратов Р.Т.

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

e-mail: rauazh@mail.ru

Важный класс $*$ -алгебр неограниченных операторов, так называемые центральные расширения алгебр фон Неймана, был рассмотрен в работах [1,2].

В данной заметке мы рассмотрим различные топологии на центральных расширениях алгебр фон Неймана.

Пусть H – гильбертово пространство, $B(H)$ – $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H . M – алгебра фон Неймана операторов, действующих в H . Обозначим через $P(M)$ полную структуру всех ортогональных проекторов из M .

Линейное подпространство D в H называется *присоединенным* к M (обозначение: $D \eta M$), если $U(D) \subseteq D$ для каждого унитарного оператора $U \in M'$ [3].

Линейный оператор T с областью определения $D(T)$, действующий в гильбертовом пространстве H , называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана M (обозначение: $T \eta M$), если $D(T) \eta M$ и $UT\xi = TU\xi$ для любого $\xi \in D(T)$ [3].

Обозначим через $S(M)$ множество всех измеримых операторов, присоединенных к M , а $LS(M)$ – множество всех локально измеримых операторов присоединенных к M .

Через $E(M)$ обозначим множество всех элементов x из $LS(M)$, для которых существует последовательность взаимно ортогональных центральных проекторов $\{z_i\}_{i \in I}$ в M с $\bigvee_{i \in I} z_i = \mathbf{1}$, такая, что $z_i x \in M$ для всех $i \in I$. т.е.

$$E(M) = \left\{ x \in LS(M) : \exists z_i \in P(Z(M)), z_i z_j = 0, i \neq j, \bigvee_{i \in I} z_i = \mathbf{1}, z_i x \in M, i \in I \right\},$$

где $Z(M)$ – центр M . Алгебра $E(M)$ называется *центральным расширением* M .

Пусть $t(M)$ обозначает топологию на $E(M)$ индуцированную топологией $t(M)$ из $LS(M)$.

Через $E(M)_h$ обозначим множество всех самосопряженных элементов в $E(M)$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset E(M)_h$ называется (o) -сходящейся к $x \in E(M)_h$ (обозначается $x_\alpha \xrightarrow{(o)} x$), если в $E(M)_h$ существуют сети $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$, такие, что $a_\alpha \leq x_\alpha \leq b_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ и $a_\alpha \uparrow x$, $b_\alpha \downarrow x$. Самая сильная топология на $E(M)_h$, для которой (o) -сходимость сетей означает их сходимость в топологии, называется *порядковой топологией* или (o) -топологией и обозначается $t_o(M)$.

Пусть $t_{ch}(M)$ (соответственно $t_h(M)$) обозначает топологию на $E(M)_h$, индуцированную топологией $t_c(M)$ (соответственно $t(M)$ из $E(M)$).

Опишем класс алгебр фон Неймана M , для которых топологии $t_c(M)$ и $t_o(M)$ совпадают.

Теорема 1. Пусть M – алгебра фон Неймана.

i) $t_{ch}(M) \leq t_o(M)$ тогда и только тогда, когда M является типа I_{fin} ;

ii) $t_{ch}(M) = t_o(M)$ тогда и только тогда, когда M является алгеброй σ -конечного типа I_{fin} .

Из теоремы 1 следует следующее

Следствие 1.

1) Если M является σ -конечной алгеброй фон Неймана, но не является типом I_{fin} , тогда $t_o(M) < t_h(M)$;

2) Если M не является σ -конечной алгеброй фон Неймана, но является типом I_{fin} , тогда $t_h(M) < t_o(M)$;

В следующих теоремах, показаны класс алгебр фон Неймана, для которых топологии совпадают.

Теорема 2. Пусть $M = \bigoplus_{k=0}^n M_k$, где M_0 – алгебра фон Неймана типа

I_{fin} , M_k – факторы типа I_∞ или III, $k = \overline{1, n}$. Тогда $E(M) = S(M)$ и топологии $t_c(M)$ и $t(M)$ совпадают.

Теорема 3. Пусть $M = \bigoplus_{k=0}^n M_k$, где M_0 – алгебра типа I_{fin} , M_k – факторы типа I_∞ , $k = \overline{1, n}$, а сужение следа τ на M_0 конечно. Тогда $E(M) = S(M, \tau)$, а топологии $t_c(M)$ и t_τ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Additive derivations on algebras of measurable operators. // *Journal of Operator Theory*. – 2012. – Vol. 67. – P. 495-510.
- [2] Muratov M.A., Chilin V.I. Central extensions of *-algebras of measurable operators. // *Doklady AN Ukraine*. – 2009. – Vol. 2. – P. 24-28.
- [3] Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. // *Праці Ін-ту математики НАН України*. – 2007. – т. 69. – 390 с.

ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ ФИНИТНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ АЛГЕБР

Жавлиев С.К.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
e-mail: sarvar.javliyev@mail.ru

Установлено, что для равномерно вычислимо отделимой эквивалентности финитная аппроксимируемость всякой представимой над ней алгебры равносильна иммунности характеристической трансверсали этой эквивалентности.

С неопределяемыми базовыми понятиями можно ознакомиться в [1,2]. Рассматриваются универсальные алгебры эффективных сигнатур.

Под словом эквивалентность понимается отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел ω . Если η – эквивалентность, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым, если α является объединением подходящих η -классов (т.е. $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \Rightarrow y \in \alpha$).

Если (A, ν) – нумерованная алгебра, то ее нумерационную эквивалентность будем называть, для краткости, ядром нумерации и обозначать через $\ker(\nu)$.

Характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество минимальных представителей всех смежных классов этой эквивалентности, т.е.

$$tr(\eta) = \{x \mid \forall y (x = y \pmod{\eta} \Rightarrow x \leq y)\}.$$

Характеристической трансверсалью нумерации (алгоритмического представления) ν называется характеристическая трансверсаль ее ядра, т.е. $tr(\ker(\nu)) = tr(\{ \langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y \})$, которую, в целях сокращения, часто будем обозначать через $tr(\nu)$.

Определение 1. Алгебра A называется представимой над эквивалентностью η на ω (или η -алгеброй), если существует нумерация этой алгебры с ядром η .

Определение 2. Если μ - алгоритмическое представление системы $\mathfrak{M}$, то пара $(\mathfrak{M}, \mu)$ называется нумерованной системой.

Напомним [1,2], что если $(A, \mu), (B, \nu)$ - нумерованные алгебры, то гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$ называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т.е. существует вычислимая функция f такая, что $\varphi\mu = \nu f$. Если $\mathfrak{B} = \{(B_i, \nu_i) \mid i \in I\}$ - семейство нумерованных алгебр, то говорят, что нумерованная алгебра (A, μ) аппроксимируется $\mathfrak{B}$ -алгебрами, если для всякой пары различных элементов $a_0, a_1 \in A$ существует морфизм $\varphi_{\{a_0, a_1\}}$ из (A, μ) в подходящую $\mathfrak{B}$ -алгебру, различающий эти элементы (т.е. $\varphi_{\{a_0, a_1\}}(a_0) \neq \varphi_{\{a_0, a_1\}}(a_1)$).

Определение 3. Нумерованная алгебра (A, ν) называется вычислимо отделимой, если если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν -вычислимым (ν -вычислимо перечислимым) множеством.

Предложение 1. Пусть A - произвольная универсальная алгебра, представимая над вычислимо отделимой эквивалентностью η с иммунной характеристической трансверсалью $tr(\eta)$. Тогда A финитно аппроксимируема.

Предложение 2. Для любого $\alpha \subseteq \omega$ существует не финитно аппроксимируемая η^α -алгебра.

Предложение 3. Для любого кобесконечного $\alpha \subseteq \omega$ равносильны следующие условия:

- 1) $tr(\eta_\alpha)$ - иммунна;
- 2) всякая η_α -алгебра финитно аппроксимируема.

Теорема 1. Для бесконечной равномерно вычислимо отделимой эквивалентности η следующие условия равносильны:

- 1) характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ иммунна;
- 2) всякая алгебра, представимая над η является финитно аппроксимируемой.

Литература

- [1] Ершов Ю.Л. *Теория нумераций*, М., Наука, 1977, 416 с.
- [2] Гонсаров С.С., Ершов Ю.Л. *Конструктивные модели*. Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
- [3] Касымов Н.Х., *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*. Успехи мат. наук, 1996, 51, No.~3, 145–176.

[4] Касымов Н.Х. ., *Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями*. Алгебра и логика, 1987, 26, No.~6, 715–730.

ЛИНЕЙНОСТЬ ЙОРДАНОВЫХ *–ОТОБРАЖЕНИЙ НА АЛГЕБРАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Зокиров Ф.М.

*Ташкентский государственный педагогический университет, Ташкент,
Узбекистан*

e-mail: zakirovfm@mail.ru

В работах [1,2] введено понятие йорданово *–отображения, сохраняющего инволюцию и йорданово произведение $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. И было доказано, что если M_1 и M_2 – алгебры фон Неймана и M_1 не содержит абелевых прямых слагаемых, то всякое йорданово *–отображение между M_1 и M_2 линейно, т.е. является йордановым изоморфизмом.

В [1] поставлена задача – получить вариант указанного результата для JBW – алгебр, решение которой выполнено в работе [3]. А в работе [4] результат полученный для JBW – алгебр обобщается на более широкий класс упорядоченных йордановых алгебр, а именно для OJ – алгебр. Причем предложенное в работе [4] доказательство является более алгебраическим, чем в перечисленных выше работах [1-3].

Неограниченным аналогом алгебр фон Неймана являются алгебры измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом и естественной топологией сходимости по мере или с другой топологией.

При этом естественно возникает вопрос: верно ли для йордановых *–отображений на алгебре измеримых операторов аналог результатов полученных в работах [1-4]?

В настоящей заметке мы дадим частичный ответ на поставленный вопрос.

Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $B(H)$ – *–алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H , M – подалгебра фон Неймана M , $\wp(M) = \{p \in M : p^2 = p = p^*\}$ – решетка всех проекторов из M . Через $\wp_{fin}(M)$ будем обозначать множество всех конечных проекторов из M .

Замкнутый линейный оператор x , присоединенный к алгебре фон Неймана M , имеющий всюду плотную область определения $D(x) \subset H$, называется *измеримым* относительно M , если существует такая

последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $p_n \uparrow 1, p_n(H) \subset D(H)$ и $p_n^{\perp} = 1 - p_n \in \mathcal{O}_{fin}(M)$ для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$

Множество $C(M)$ всех измеримых относительно M операторов является $*$ -алгеброй с единицей 1 над полем $\mathbb{C}$ относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и сильного умножения, получаемых замыканием обычных операций. Ясно, что M является $*$ -подалгеброй в $C(M)$ (подробные сведения из теории измеримых операторов можно найти в монографиях [5,6] и в работе [7]).

Пусть M_1 и M_2 - алгебры фон Неймана, $C(M_1)$ и $C(M_2)$ – $*$ -алгебры измеримых операторов присоединенных к алгебрам M_1 и M_2 соответственно.

Определение. Взаимно-однозначное отображение φ между $C(M_1)$ и $C(M_2)$ назовем йордановым, если оно мультипликативно, т.е. $\varphi(a \circ b) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in C(M_1)$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая:

Теорема. Пусть $C(M_1)$ и $C(M_2)$ – $*$ -алгебры измеримых операторов присоединенных к алгебрам M_1 и M_2 соответственно, и M_1 – не содержит центральных абелевых проекторов. Тогда всякое йорданово отображение φ между $C(M_1)$ и $C(M_2)$ является йордановым изоморфизмом.

Список литературы

- [1] Hakeda J. Additivity of Jordan $*$ -maps on AW $*$ -algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 1986. Vol.96, №3. p413-420.
- [2] Hakeda J., Saito K. Additivity of Jordan $*$ -maps between operator algebras, J. Math. Soc. Jap., 1986. Vol.38, №3. p.403-408.
- [3] Аюпов Ш.А., Адизов А.А. Линейность мультипликативных отображений йордановых банаховых алгебр, ДАН УзССР, 1990, №10, С.5-6.
- [4] Аюпов Ш.А., Адизов А.А., Желябин В.Н. Мультипликативные отображения упорядоченных йордановых алгебр, Матем. заметки, 1992, том 51, выпуск 2, С.3-8.
- [5] Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан, 1983.
- [6] Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Киев. Институт Математики НАН Украины, 2007.
- [7]. Segal I. A non-commutative extension of abstract integration, Ann.Math., 1953. Vol.57. p.401-457.

СВОЙСТВА РЕШЕТКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТРИПОТЕНТОВ В НЕЙТРАЛЬНОМ SFS -ПРОСТРАНСТВЕ

¹Ибрагимов М.М., ²Тлеумуратов С.Ж.

¹Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

²Нукусский горный институт, Нукус, Узбекистан

Введение. Гранево симметричные пространства впервые введены и исследованы Я.Фридманом и Б.Руссо в работах [1-4] как геометрическая модель квантовой механики. Основной целью проекта исследования этих пространств было геометрическая характеристика пространств состояний операторных алгебр, точнее предсопряженных пространств JBW^* -троек, допускающих алгебраическую структуру. В [2, Предложение 4.5] доказано, что для любого фиксированного геометрического трипотента ω в нейтральном сильно гранево симметричном пространстве (SFS -пространстве) Z множество $L_\omega := \{v \in GU : v \leq \omega\} \cup \{0\}$ является полной ортомодулярной решеткой с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом ω и ортодополнением $v \mapsto v^\perp = \omega - v$.

Предварительные сведения. Пусть Z действительное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются взаимно ортогональными, если $\|f + g\| = \|f - g\| = \|f\| + \|g\|$. Взаимно ортогональность элементов $f, g \in Z$ обозначается в виде $f \diamond g$. По норме выставленной гранью единичного шара Z_1 пространства Z является не пустое множество (обязательно $\neq Z_1$) имеющий вид $F_x = \{f \in Z_1 : f(x) = 1\}$, где $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$. Для любого подмножества $S \subset Z$ положим $S^\diamond = \{f \in Z : f \diamond g, \forall g \in S\}$ и назовем $S^\diamond$ ортогональным дополнением к S . Элемент $u \in Z^*$ называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $\langle u, F_u^\diamond \rangle = 0$.

Определение 1. Действительное или комплексное нормированное пространство Z называется слабо гранево симметричным пространством (WFS -пространством), если каждая по норме выставленная грань Z_1 является симметричной.

Сжимающий проектор Q на нормированном пространстве Z называется нейтральным, если для любого $f \in Z$ из $\|Qf\| = \|f\|$ вытекает $Qf = f$.

Нормированное пространство Z называется нейтральным, если для каждой симметричной грани F_u соответствующий проектор $P_2(u)$ является нейтральным.

Определение 2. WFS-пространство Z называется сильно гранево симметричным пространством (SFS - пространством), если для каждой

симметричной грани F_u из Z_1 и каждого $v \in Z^*$ с $\|v\|=1$ и $F_u \subset F_v$ имеем $S_u^* v = v$, где S_u – симметрия, соответствующая F_u .

Основной результат.

Напомним (см. [5]), что грань F выпуклого множества K называется *расщепленной гранью*, если существует грань G , называемая дополнительной к F , такая, что $F \cap G = \emptyset$ и K прямая выпуклая сумма $F \oplus_c G$, т.е. любой элемент $f \in K$ может быть однозначно представлен в виде $f = tg + (1-t)h$, где $t \in [0;1]$, $g \in F, h \in G$.

Теорема 3. Пусть Z нейтральное SFS-пространство и $\omega \in G\mathcal{U}$ фиксированный геометрический трипотент. Пусть для некоторого $u \leq \omega$ симметричная грань F_u является расщепленной и её дополнительной гранью является $F_v \in S\mathcal{F}$. Тогда $F_v = F_{u^\perp}$.

Лемма 4. Пусть Z нейтральное SFS-пространство, $\omega \in G\mathcal{U}$ фиксированный геометрический трипотент и $u, v \in L_\omega$. Если $u \wedge v = 0$ и $u^\perp \leq v$, то $u^\perp = v$.

Лемма 5. Пусть Z нейтральное SFS-пространство и $\omega \in G\mathcal{U}$ фиксированный геометрический трипотент. Пусть для некоторого $u \leq \omega$ симметричная грань F_u является расщепленной и её дополнительной гранью является $F_v \in S\mathcal{F}$, т.е. $F_u \oplus_c F_v = F_\omega$. Тогда для любого $x \in L_\omega$, для которого $x \wedge u = 0$, выполняется $x \leq v$.

Следствие 6. Пусть Z нейтральное SFS-пространство с условием (FE) и $\omega \in G\mathcal{U}$ фиксированный геометрический трипотент. Тогда для геометрического трипотента $u \leq \omega$ следующие свойства эквивалентны:

- (i) F_u - расщепленная грань;
- (ii) F_u - сильно расщепленная грань.

Литература

- [1] Y.Friedman and B.Russo, *A geometric spectral theorem* // Quart. J. Math. Oxford. 1986. Vol. 37. 2. p. 263-277.
- [2] Y.Friedman and B.Russo, *Affine structure of facially symmetric spaces*// Math. Proc.Cambridge Philos. Soc. 106 (1989) 107-124.
- [3] Y.Friedman and B.Russo, *Geometry of the Dual ball of the Spin Factor* // Proc. Lon. Math. Soc. 65 (1992), p. 142-174.
- [4] Y.Friedman and B.Russo, *Classification of atomic facially symmetric spaces* // Canad. J. Math. –1993. – № 1 (45). – P. 33-87.
- [5] Hanche-Olsen H., *Split faces and ideal structure of operator algebras* // Math.Scand. – 1981. – V. 48. – P. 137–144.
- [6] G. Crown, *A note on distributive sublattices of an orthomodular lattice*, J. Natur. Sei. And Math. 16(1976), 75-80.

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТЕ МНОГОГРАННИКОВ, ИЗОМЕТРИЧНЫХ ПО СЕЧЕНИЯМ

Кеунимжаев М. К., Шарипов А. С.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: ashariov@inbox.ru, keunimjaeff@gmail.com.

Многие вопросы геометрии «в целом» связаны с существованием и единственностью поверхностей с заданными геометрическими характеристиками. Геометрическими характеристиками могут быть внутренняя кривизна, внешняя или гауссова кривизны и другие функции, связанные с поверхностью.

В данной работе найден инвариант обладающее свойствами положительно определенности и монотонности, его можно принимать за условной внешней кривизны многогранника. Задачи нахождения инвариантов многогранников, определенного класса и решение задачи существования и единственности поверхности, имеющей заданные значения инвариантов, является актуальными [1].

Определение 1. Дефектом сторон многоугольника $OA_1...A_mA_{m+1}...A_n$ (рис.1) относительно угла O назовём число

$$\omega = OA_1 + OA_m - P_{A_1A_2...A_m} + OA_{m+1} + OA_n - P_{A_{m+1}A_{m+2}...A_n},$$

где $P_{A_1A_2...A_m}$ — периметр ломаной $A_1A_2...A_m$, $P_{A_{m+1}A_{m+2}...A_n}$ — периметр ломаной $A_{m+1}A_{m+2}...A_n$.

Рассмотрим многогранник S , грани которого лежат на плоскостях

$$a_ix + b_iy + c_iz = 0 \quad (i = \overline{1, ..., n}).$$

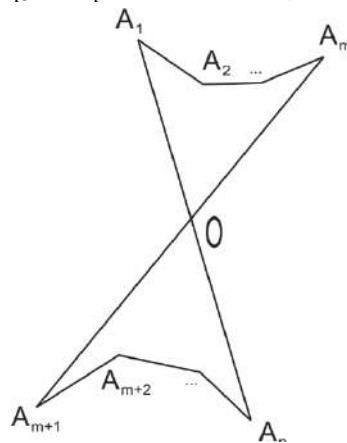


Рис. 1.

Предположим, что плоскость $x = const$ не является опорной плоскостью многогранника. Многогранник S пересекаем плоскостью $x = \pm 1$. Тогда одна из них пересекает m ребер многогранника, другая пересекает остальные $n - m$. Точки пересечения плоскостей $x = \pm 1$ с ребрами обозначим через $A'_1, A'_2, ..., A'_m, A'_{m+1}, ..., A'_n$. Точки $A'_1, A'_2, ..., A'_m$ симметрично отобразим

относительно начало координат и получим точки $A_1, A_2, \dots, A_m$. Таким образом получили многоугольник как рис.1.

Определение 2. Условным полным углом многогранного угла по направлению $\vec{e}$ (OX) назовём дефект сторон многоугольника $OA_1 \dots A_m A_{m+1} \dots A_n$ относительно угла O .

Теорема 1. Условный полный угол ω инвариантен относительно преобразования вида:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = \alpha x + y \cos \varphi - z \sin \varphi + b. \\ z' = \beta x + y \sin \varphi + z \cos \varphi + c \end{cases}$$

Кривизну мы определяем как функцию множества, т.е. множеству M на выпуклом многограннике ставится в соответствие некоторое число $\mu(M)$ - условная кривизна множества M на многограннике P .

Начнём с определения условной кривизны для трех видов «основных» множеств: открытых граней, открытых ребер и вершин. Открытой гранью называется грань многогранника с исключенными вершинами и сторонами; открытым ребром называется ребро с исключенными концами.

Пусть Γ – открытая грань многогранника. Условная кривизна открытой грани многогранника принимается равной нулю:

$$\mu(M) = 0$$

Условная кривизна открытого ребра L многогранника принимается равной нулю:

$$\mu(L) = 0.$$

Пусть M -внутренняя вершина многогранника и $\omega(M)$ -условный полный угол по направлению $\vec{e}$ многогранного угла с вершиной M , гранями совпадающими через точку M . За условную кривизну вершины M многогранника P мы принимаем число $\mu(M) = \omega(M)$, т.е. условный полный угол многогранника проходящими через точку M . Если вершина M принадлежат краю многогранника условную кривизну считаем равной нулю.

Пусть P -выпуклый многогранник не имеющий ребер и опорных плоскостей перпендикулярных вектору $\vec{e}$ и пусть $P = \sum_{i=1}^n B_i$ -есть представление его в виде суммы основных множеств без общих точек. За условную кривизну многогранника P принимаем число $\mu(P) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$.

Теорема 2. Условная кривизна многогранного угла монотонно возрастающая функция аргумента h .

Список использованной литературы.

[1] Sharipov A.S., Topvoldiyev F.F. On invariants of surfaces with isometric on sections Mathematics and Statistics. 2022. V.10, №3. pp. 523-528.

2-ЛОКАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ АЛГЕБР АРЕНСА

^{1,3}Кудайбергенов К.К., ^{2,3}Каландаров Т.С.

¹Каракалпакское отделение АН РУз, Нукус, Узбекистан

²Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

³Каракалпакское отделение Институт математики имени
В.И.Романовского АН РУз

e-mail: karim2006@mail.ru, turaboy-kts@mail.ru

Понятие 2-локального автоморфизма было введено Шемрлом [1], и в этой работе показал, что каждый 2-локальный автоморфизм алгебры всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве, является автоморфизмом. В работе [2], было показано, что каждый 2-локальный автоморфизм на алгебре всех ограниченных линейных операторов на произвольном гильбертовом пространстве, является автоморфизмом.

Одним из важных классов неограниченных операторных алгебр являются алгебры Аренса, которые впервые в коммутативном случае были рассмотрены Аренсом [3]. Некоммутативные алгебры Аренса были изучены Иноуи в работе [4].

Настоящая заметка посвящена изучению сюръективных 2-локальных автоморфизмов некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом.

Пусть $S(M, \tau)$ – алгебра всех τ -измеримых операторов присоединенных к алгебре фон Неймана M .

Для $p \geq 1$ положим $L^p(M, \tau) = \{x \in S(M, \tau) : \tau(|x|^p) < \infty\}$.

Тогда $L^p(M, \tau)$ – банахово пространство, относительно нормы

$$\|x\|_p = \left(\tau(|x|^p)\right)^{1/p}, \quad x \in L^p(M, \tau).$$

Рассмотрим множество

$$L^\omega(M, \tau) = \bigcap_{p \geq 1} L^p(M, \tau).$$

В работе Абдуллаева [5] показано, что $L^\omega(M, \tau)$ является полной локально выпуклой метризуемой *-алгеброй относительно топологии t , порожденной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p \geq 1}$.

Алгебра $L^\omega(M, \tau)$ называется некоммутативной алгеброй Аренса.

Отображение Δ из алгебры $L^\omega(M, \tau)$ в себя называется 2-локальным *-автоморфизмом, если для каждого $x, y \in L^\omega(M, \tau)$ существует *-автоморфизм $\phi_{x,y} : L^\omega(M, \tau) \rightarrow L^\omega(M, \tau)$ такой, что $\Delta(x) = \phi_{x,y}(x)$ и $\Delta(y) = \phi_{x,y}(y)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть M - алгебра фон Неймана с т.н.п. следом τ . Тогда всякий сюръективный 2-локальный автоморфизм алгебры Аренса $L^\omega(M, \tau)$ является автоморфизмом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 2677-2680 (1997).

[2] Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, 2-local derivations and automorphisms on $B(H)$, J. Math. Anal. Appl. 395, no. 1, 15-18 (2012).

[3] R. Arens, The space L^ω and convex topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. – 1946. – V. 92. – P.931-935.

[4] A. Inoue, On a class of unbounded operator algebras II. Pacific J. Math. – 1976. – V. 66. – 2. – P.411-431.

[5] P.З.Абдуллаев, Пространства сопряженные к коммутативным алгебрам Аренса, Узб.мат.журнал. 1997.2. с.3-7.

ПОЧТИ ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ 3-ЛИЕВЫХ АЛГЕБР МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

¹Курбанбаев Т., ²Искендеров А.

¹Каракалпакский государственный университет имени Бердаха,

²Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза,
e-mail: ¹tuuelbay@mail.ru, ²aryslanbekiskenderov@gmail.com

В этой заметке изучены почти внутренние дифференцирования нильпотентных 3-Лиевых алгебр малых размерностей.

Понятие n -Лиевой алгебры было введено В. Т. Филипповым в 1985 году [1].

Определение 1. n -Лиевая алгебра – это векторное пространство A , наделенное кососимметричным умножением, удовлетворяющий n -арному тождеству Якоби:

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

В 1987 году С. М. Касымов [2] определил понятие нильпотентности n -Лиевой алгебры следующим образом:

Определение 2. n -Лиевая алгебра A называется нильпотентной, если $A^s = 0$ для некоторого целого неотрицательного s , в котором A^{i+1} определяется индуктивно как

$$A^1 = A \text{ и } A^{i+1} = [A^i, A, \dots, A].$$

n -Лиевая алгебра A нильпотентна класса c , если $A^{c+1} = 0$ и $A^c \neq 0$.

Определение 3. Дифференцированием n -Лиевой алгебры A называется линейное отображение A в себя, удовлетворяющее условию

$$d([x_1, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [x_1, \dots, d(x_i), \dots, x_n]$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in A$. Обозначим пространство всех дифференцирований n -Лиевой алгебры A через $Der(A)$.

Определение 4. Отображение $R(x_2, \dots, x_n): a \rightarrow [a, x_2, \dots, x_n]$ n -Лиевой алгебры A называется правым умножением, определяемым элементами $x_2, \dots, x_n$. Правые умножения и их линейные комбинации являются дифференцированиями, которые называются *внутренними*. Обозначим пространство всех внутренних дифференцирований n -Лиевой алгебры A через $Inner(A)$.

Определение 5. Дифференцирование $D \in Der(A)$ n -Лиевой алгебры A называется *почти внутренним дифференцированием*, если $D(x) \in [x, A, \dots, A]$ ($[x, A, \dots, A] \subseteq A$) для всех $x \in A$. Другими словами, существуют такие $a_2(x), \dots, a_n(x) \in A$, что $D(x) = [x, a_2(x), \dots, a_n(x)]$. Обозначим пространство всех почти внутренних дифференцирований n -Лиевой алгебры A через $AID(A)$.

Теорема 1. [3] Любая $(n+3)$ -мерная и $(n+4)$ -мерная нильпотентная n -Лиевая алгебра изоморфна одной из попарно не изоморфных алгебр:

$$A_{n+3,2}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,3}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+3}, [e_2, \dots, e_n, e_{n+2}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,4}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,5}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_n, e_{n+2}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,6}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+2}, [e_2, \dots, e_n, e_{n+2}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,7}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+2}, \\ [e_2, \dots, e_n, e_{n+2}] = [e_1, e_3, \dots, e_{n+1}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+3,8}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+2}, [e_1, e_3, \dots, e_{n+1}] = e_{n+3};$$

$$A_{n+4,1}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+3}, [e_2, \dots, e_{n+1}] = e_{n+4};$$

$$A_{n+4,2}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+3}, [e_3, \dots, e_{n+2}] = e_{n+4}, (n \geq 3);$$

$$A_{n+4,3}: [e_1, \dots, e_n] = e_{n+1}, [e_2, \dots, e_n, e_{n+2}] = e_{n+3}, [e_1, e_3, \dots, e_n, e_{n+2}] = e_{n+4};$$

Теперь мы рассмотрим случай 3-Лиевых алгебр. Тогда в Теореме 1, при $n = 3$ имеем следующие 6-мерные и 7-мерные 3-Лиевые алгебры:

$$A_{6,2}: [e_1, e_2, e_3] = e_6;$$

$$A_{6,3}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_4] = e_6, [e_2, e_3, e_5] = e_6;$$

$$A_{6,4}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_4] = e_6;$$

$$A_{6,5}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_5] = e_6;$$

$$A_{6,6}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_4] = e_5, [e_2, e_3, e_5] = e_6;$$

$$A_{6,7}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_4] = e_5, [e_2, e_3, e_5] = [e_1, e_3, e_4] = e_6;$$

$$A_{6,8}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_4] = e_5, [e_1, e_3, e_4] = e_6;$$

$$A_{7,1}: [e_1, e_2, e_3] = e_6, [e_2, e_3, e_4] = e_7;$$

$$A_{7,2}: [e_1, e_2, e_3] = e_6, [e_3, e_4, e_5] = e_7;$$

$$A_{7,3}: [e_1, e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_3, e_5] = e_6, [e_1, e_3, e_5] = e_7;$$

Основными результатами являются следующие теоремы.

Теорема 1. Всякие почти внутренние дифференцирования 6-мерных нильпотентных 3-Лиевых алгебр являются внутренними.

Теорема 2. Всякие почти внутренние дифференцирования 7-мерных нильпотентных 3-Лиевых алгебр являются внутренними.

Литература

1. V. T. Filippov, n -Lie algebras, Sib. Math. Zh. 26(6) (1985), 126–140.
2. S. M. Kasymov, Theory of n -Lie algebras, Algebra Logika 26(3) (1987), 277–297.
3. M. Eshrati, F. Saeedi, H. Darabi, Low Dimensional Nilpotent N -Lie Algebras, arXiv:1810.03782v1 [math.RA] 9 Oct 2018

ПОЧТИ ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ 5-МЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Курбанбаев Т., Саймбетов Р.

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

e-mail: tuuelbay@mail.ru, saymbetovr@gmail.com

В настоящей работе рассмотрены почти внутренние дифференцирования 5-мерных некоторых разрешимых алгебр Лейбница.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [x, z], y]$$

где $[,]$ - умножение в L .

Для произвольной алгебры Лейбница L определим следующий ряд:

$$L^{[1]} = L, L^{[n]} = [L^{[n-1]}, L] \text{ — производный ряд;}$$

Алгебра Лейбница L называется *разрешимой*, если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{[m]} = 0$. Натуральное число m называется *индексом разрешимости* алгебры L , если $L^{[m-1]} \neq 0$ и $L^{[m]} = 0$.

Определение 2. Линейное отображение $D: L \rightarrow L$ называется *дифференцированием* алгебр Лейбница L , если для любых $x, y \in L$ выполняется следующее равенство

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)].$$

Пространство всех дифференцирований алгебр L обозначим через $Der(L)$.

Для каждого $x \in L$ оператор $R_x: L \rightarrow L$ который назовем *правым умножением*, такое, что $R_x(y) = [y, x]$, $y \in L$, и этот оператор является дифференцированием. Дифференцирование R_x называется *внутренним дифференцированием* алгебр Лейбница L . Пространство всех внутренних дифференцирований алгебр обозначим через $Inner(L)$.

Определение 3 [1]. Дифференцирование $D \in Der(L)$ алгебр Лейбница L называется *почти внутренним дифференцированием*, если $D(x) \in [x, L]$, другими словами существует $a_x \in L$ такое, что $D(x) = [x, a_x]$. Пространство всех почти внутренних дифференцирований обозначим через $AID(L)$.

Теорема 1 [2]. Пусть L пятимерная разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой является 3-мерной абелевой алгеброй. Тогда существует базисы $\{e_1, e_2, e_3, x_1, x_2\}$ в L такие, что в этом базисе алгебра L изоморфно следующим попарно не изоморфным алгебрам:

$M_1(\mu_1, \mu_2), \mu_1 \neq 0:$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_3, x_1] = \mu_1 e_3, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_2] = \mu_2 e_3,$ $[x_1, e_1] = -e_1, [x_1, e_3] = -\mu_1 e_3, [x_2, e_2] = -e_2, [x_2, e_3] = -\mu_2 e_3.$
$M_2(\mu_1, \mu_2):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_3, x_1] = \mu_1 e_3, [e_2, x_2] = e_2,$ $[e_3, x_2] = \mu_2 e_3, [x_1, e_1] = -e_1, [x_2, e_2] = -e_2$
$M_3(\mu), \mu \neq 0:$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_2] = \mu e_3, [x_2, e_2] = -e_2,$ $[x_2, e_3] = -\mu e_3$
$M_4(\mu_1, \mu_2):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_3, x_1] = \mu_1 e_3, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_2] = \mu_2 e_3,$ $[x_2, e_2] = -e_2$
$M_5(\mu_1, \mu_2):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_3, x_1] = \mu_1 e_3, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_2] = \mu_2 e_3$
$M_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [x_1, e_1] = -e_1, [x_2, e_2] = -e_2,$ $[x_1, x_1] = \lambda_1 e_3, [x_2, x_1] = \lambda_2 e_3, [x_1, x_2] = \lambda_3 e_3, [x_2, x_2] = \lambda_4 e_3$
$M_7(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [x_2, e_2] = -e_2,$ $[x_1, x_1] = \lambda_1 e_3, [x_2, x_1] = \lambda_2 e_3, [x_1, x_2] = \lambda_3 e_3, [x_2, x_2] = \lambda_4 e_3$
$M_8(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4):$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2,$ $[x_1, x_1] = \lambda_1 e_3, [x_2, x_1] = \lambda_2 e_3, [x_1, x_2] = \lambda_3 e_3, [x_2, x_2] = \lambda_4 e_3$

$M_9 :$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_1] = e_3,$ $[x_1, e_1] = -e_1, [x_1, e_3] = -e_3$
$M_{10} :$	$[e_1, x_1] = e_1, [e_3, x_1] = e_3, [x_1, e_1] = -e_1,$ $[x_2, e_1] = e_3, [e_2, x_2] = e_2, [x_2, e_2] = -e_2$

Следующая теорема является основным результатом данной заметки.

Теорема 2. В следующей таблице показан результат вычисления почти внутренних дифференцирований для всех пятимерных разрешимых алгебр Лейбница из Теоремы 1;

Algebra	dim Inner	dim AID
$M_1(\mu_1, \mu_2), \mu_1 \neq 0 :$	5	8
$M_2(\mu_1, \mu_2) :$	4	6
$M_3(\mu), \mu \neq 0 :$	4	4
$M_4(\mu_1, \mu_2) :$	3	5
$M_5(\mu_1, \mu_2) :$	2	4
$M_6(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) :$	4	8
$M_7(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) :$	3	7
$M_8(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) :$	2	6
$M_9 :$	3	3
$M_{10} :$	4	4

Литература

[1] Adashev J.K., Kurbanbaev T.K., Almost Inner Derivations of Some Nilpotent Leibniz Algebras, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020, 13(6), 733–745

[2] Khudoyberdiyev A.Kh., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K., On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras, Linear Algebra and its Applications, 457 (2014) 428–454.

ГЕОМЕТРИЯ НА ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЯХ В 2R_5

Мамадалиев Б. М.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

E-mail: mamadaliyev_botirjon@mail.ru

Рассмотрим двумерных плоскостей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве индекса два 2R_5 [1]-[3].

Известно [2], что два неколлинеарных вектора на плоскости вполне определяют аффинную систему координат на этой плоскости. Оказывается, это тривиальное утверждение не всегда верно, когда плоскость является подмножеством аффинного пространства большей размерности, когда в нем

определена конкретная псевдоевклидова геометрия. Это утверждение мы подтвердим на простом примере плоскости пространства Минковского.

Пусть 1R_3 – трехмерное пространство Минковского и $Oxyz$ – система координат этого пространства, скалярное произведение векторов $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ определено по формуле

$$(\vec{X} \cdot \vec{Y}) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

Теорема. Два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не всегда могут быть базисными векторами на плоскости, параллельной этим векторам пространства Минковского.

Доказательство теоремы основывается на свойства скалярного произведения векторов пространства Минковского, где норма вектора может быть действительным, мнимым или изотропным. Предположим $\vec{c}$ параллельный плоскости P линейно выражается через $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

где α, β – аффинные координаты. Тогда $\vec{c}$ имеет определенную норму

$$|\vec{c}| = \sqrt{\alpha^2 |\vec{a}|^2 + 2\alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \beta^2 |\vec{b}|^2}. \quad (1)$$

Доказываем, что только при определенных условиях, наложенных на нормы векторов $\vec{a}, \vec{b}$, можно добиться, чтобы равенство (1) – представляло норму произвольного вектора на плоскости P .

Используя эту теорему получаем следующую утверждению.

Утверждение. Геометрия на произвольной двумерной плоскости 2R_5 определяется наличием параллельных изотропных векторов на этой плоскости.

- 1) Не имеется изотропных направлений, параллельных плоскости P – геометрия евклидова.
- 2) Имеется одно изотропное направление, параллельное плоскости P – геометрия галилеева.
- 3) Имеются два изотропных направления, параллельных плоскости P – геометрия Минковского.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Артикбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, (1991). - 180 стр.

[2]. Артикбаев А., Мамадалиев Б. М. Геометрия на подпространствах пространства 2R_5 . Бюллетень Института математики, 2021, Vol 4, №3, стр. 42-46.

[3]. Мамадалиев Б.М. Полные двумерные поверхности в 2R_5 . Сам ДУ “Илмий ахборотнома”. 2020 №1, стр. 35-38.

РАЦИОНАЛЬНЫЙ БАЗИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ ИНВАРИАНТНОВ ДЛЯ ГРУППЫ ГЕЙЗИНБЕРГА

¹Муминов К.К., ²Султонова Б.Р.

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

²Гулистон государственный университет, Гулистон, Узбекистан

e-mail: gobiljonmuminov2023@gmail.com, barnosultonova444@gmail.com

В работе дается явное описание пятиэлементного рационального базиса дифференциальным полем дифференциальных рациональных функций инвариантных относительно действия группы Гейзинберга в шестимерном действительном линейном пространстве R^6

Пусть R^7 шестимерное линейное пространство над полем действительных чисел R , и пусть $GL(7, R)$ группа всех обратимых линейных преобразований пространства R^7 . Элементы из R^7 представляются в виде шестимерных вектор-столбцов, а элементы из $GL(7, R)$ отождествляются с обратимыми 6×6 матрицами. Действия подгруппы G группы $GL(7, R)$ в R^7 определяются как обычное умножение матрицы на вектор-столбец.

Обозначим через $R[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$ алгебру всех многочленов от счетного числа переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, x_5^{(1)}, x_6^{(1)}, x_7^{(1)}, \dots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}, x_5^{(k)}, x_6^{(k)}, x_7^{(k)}, \dots$ над полем R . Записав набор $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ коротко через $\vec{x}$ и будем обозначать алгебру $R[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$ через $R[\vec{x}]$. Положим $d(x_i) = x_i^1, d(x_i^{(k)}) = x_i^{k+1}, i = \overline{1, 6}, k = 1, 2, \dots, d(\lambda) = 0, \lambda \in R$. Отображение d однозначно продолжается до дифференцирования в алгебре $R[\vec{x}]$, наделяя эту алгебру структурой дифференциального кольца. Элементы из дифференциального кольца $R[\vec{x}]$ обычно называют d -многочленами и обозначают через $p[\vec{x}]$. Каждый d -многочлен есть многочлен переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ и их производных.

Дифференцирование d , заданное на дифференциальном кольце $R[\vec{x}]$, единственным образом продолжается до дифференциального на соответствующее поле частных кольца $R[\vec{x}]$. Это поле частных называется дифференциальным полем (d -полем) дифференциально рациональных функций и обозначается через $R\langle\vec{x}\rangle$. Элементы d -поля $R\langle\vec{x}\rangle$, т.е. отношения d -многочленов, называют дифференциальными рациональными функциями (d -рациональными функциями) и записываются в виде $f\langle\vec{x}\rangle$.

Если $f\langle g(\vec{x}) \rangle = f(\vec{x})$ для всех $g \in G$, то d – рациональная функция $f\langle \vec{x} \rangle \in R\langle \vec{x} \rangle$ называется G – инвариантной. Множества всех G – инвариантных d – рациональных функций обозначается через $R\langle \vec{x} \rangle^G$. Известно, что $R\langle \vec{x} \rangle^G$ является дифференциальным подполем в дифференциальном поле $R\langle \vec{x} \rangle$. Группа Гейзенберга есть подгруппа $G = Nil$ в группе $GL(7, R)$ состоящая из всех матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_i, b_i, c \in R (i=1, 2, 3, 4)$$

Теорема. Следующие дифференциальные многочлены (детерминанты) являются инвариантами.

$$j_1\langle x \rangle = x_7$$

$$j_2\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 6, 7; k = 0, 1;$$

$$j_3\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 5, 7; k = 0, 2;$$

$$j_4\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 4, 7; k = 0, 3;$$

$$j_5\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 3, 7; k = 0, 4;$$

$$j_6\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 2, 7; k = 0, 5;$$

$$j_7\langle x \rangle = \det(x_i^k), i = 1, 7; k = 0, 6;$$

Литература

- [1] Капланиский И. *Введения в дифференциальную алгебру* М. Ил.1959.
- [2] Муминов К.К., Чилин В.И. *Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах*. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Germaniya). 2015.
- [3] Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых*. Ташкент. ФАН.1988.

2-ЛОКАЛЬНЫЕ ВНУТРЕННИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

¹Палуанов С.А., ^{1,2}Алаудинов А.К.

¹Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

²Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук
Узбекистана

e-mail: paluanovs@mail.ru

Понятие 2-локальных дифференцирований было введено П. Шемрлем в работе [4], где были описаны 2-локальные дифференцирования на алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H . Ш.А. Аюпов и К.К. Кудайбергенов впервые рассматривали 2-локальные дифференцирования на неассоциативных алгебрах, а именно они исследовали 2-локальные дифференцирования на конечномерных полупростых алгебрах Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики [1]. Аналогичное понятие 2-локального внутреннего дифференцирования изучалось в работах [2, 3].

Алгебра L над полем F называется алгеброй Ли, если ее умножение удовлетворяет тождествам:

$$1) [x, x] = 0,$$

$$2) [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

для всех x, y, z в L .

Алгебра Ли L называется разрешимой, если $L^{(k)} = \{0\}$ для некоторого целого k , где $L^{(0)} = L$, $L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$, $k \geq 1$. Любая алгебра Ли L содержит единственный максимальный разрешимый идеал, называемый радикалом L и обозначаемый $\text{Rad } L$. Нетривиальная алгебра Ли L называется полупростой, если $\text{Rad } L = 0$. Это эквивалентно требованию, чтобы L не имел ненулевых абелевых идеалов.

Дифференцирование алгебры Ли L – это линейное отображение $D: L \rightarrow L$, удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

для любого $x, y \in L$.

Пусть a – элемент алгебры Ли L . Рассмотрим оператор $ad_a: L \rightarrow L$, определенный равенством $ad_a(x) = [x, a]$. Этот оператор является дифференцированием и называется внутренним дифференцированием.

Оператор Δ (не обязательно линейный) называется 2-локальным внутренним дифференцированием, если для любого $x, y \in L$ существует внутреннее дифференцирование $ad_{x,y}: L \rightarrow L$ (зависящее от x и y) такое, что

$\Delta(x) = ad_{x,y}(x)$ и $\Delta(y) = ad_{x,y}(y)$.

Теорема. Пусть L – произвольная конечномерная полупростая алгебра Ли над F . Тогда всякое 2-локальное внутреннее дифференцирование $\Delta: L \rightarrow L$ является внутренним дифференцированием.

Литературы

[1] Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra and its Applications 474 (2015)1–11

[2] Sh. Ayupov, F. Arzikulov, 2-Local derivations on associative and Jordan matrix rings over commutative rings, Linear Algebra Appl. (2017) 522:28–50.

[3] Sh. Ayupov, F. Arzikulov, Description of 2-local and local derivations on some Lie rings of skew-adjoint matrices, Linear Algebra and its Applications 474 (2015)1–11

[4] P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2677–2680.

О СВОБОДНЫХ ЭНЕРГИЯХ МОДЕЛИ ПОТТС-SOS НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рахматуллаев М. М., Расулова М. А.

Институт Математики имени В.И. Ромалунского, Ташкент, Узбекистан

e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru, m_rasulova_a@rambler.ru

Гамильтониан модели Поттс-SOS определяется следующим образом (см. [4]):

$$H(\sigma) = -J_s \sum_{\langle x,y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_p \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J_s, J_p \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ – ближайшие соседи, δ_{uv} – символ Кронекера.

В случае $J_p = 0, J_s \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью SOS. В случае $J_s = 0, J_p \neq 0$ модель (1) совпадает с моделью Поттса. В работах [2], [3] найдена общая формула для вычисления свободной энергии для моделей Изинга и Поттса на дереве Кэли, вычислена свободная энергия для известных граничных условий.

Известно [4], что каждой мере Гиббса для модели Поттс-SOS (1) на дереве Кэли порядка $k \geq 1$ можно сопоставить совокупность векторов

$$h_x^* = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots, h_{m-1,x}), \quad x \in G_k,$$

удовлетворяющих уравнению

$$h_x^* = \sum_{y \in S(x)} F(h_y^*, m, \theta, r), \quad (2)$$

где $S(x)$ – множество прямых $h = \{h_x \in R^m, x \in V\}$ потомков точки $x \in G_k$ и

$\theta = \exp(J_s \beta)$, $r = \exp(J_p \beta)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$, функция $F(\cdot, m, \theta, r): R^m \rightarrow R^m$

определена следующим образом: $F(h, m, \theta, r) = (F_0(h, m, \theta, r), \dots, F_{m-1}(h, m, \theta, r))$ с

$$F_i(h, m, \theta, r) = \ln \left(\frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} r^{\delta_{ij}} \exp(h_j) + \theta^{m-i} r^{\delta_{mi}}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j} r^{\delta_{mj}} \exp(h_j) + r} \right), \quad (3)$$

где $h = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Свободной энергией, соответствующей называется следующий предел (если он существует):

$$E(\beta, h) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta |V_n|} \ln Z_n(\beta, h),$$

где Z_n^{-1} – нормировочный множитель.

В данной работе рассматривается модель Поттс-SOS с тремя состояниями на дереве Кэли. Целью исследования является нахождение общей формулы вычисления свободной энергии для модели Поттс-SOS.

Следующая теорема дает общий вид свободной энергии.

Теорема. Для мер Гиббса модели Поттс-SOS на дереве Кэли, удовлетворяющих условию (2), свободная энергия определяется следующим выражением:

$$E(\beta, h) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} a(x),$$

где

$$a(x) = \frac{1}{3\beta} \sum_{i=0}^2 \left(-h_{i,x} + \ln \left(\sum_{u=0}^2 \theta^{|i-u|} \cdot r^{\delta_{iu}} \cdot \exp(h_{u,y}) \right) \right).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. // World scientific. – 2013.
- [2] Gandolfo D., Rakhmatullaev M.M., Rozikov U.A., Ruiz J. On free energies of the Ising model on the Cayley tree. // J. Stat. Phys. – 2013. Том 150. – С. 1201–1217.
- [3] Rozikov U. A., Rakhmatullaev M.M. Free energies of the Potts model on a Cayley tree. // Theor. Math. Phys. – 2017. Том 190. – С. 98–108.
- [4] Saygili H. Gibbs measures for the Potts-SOS model with three states of spin values. // Asian Journal of Current Research. – 2017. Том 1. № 3. – С. 114–121.

ПЛОСКИЕ АФФИННОЕ СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ Γ_{jk}^i

Танирбергенов С.А.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

Аффинная связность на многообразии Ω называется постоянной, если на Ω существует сечение в расслоении поле реперов, для которого коэффициенты связности Γ_{jk}^i является постоянными. Такие аффинные связности были определены Г. Вранчану в работе [1]. Теория постоянных аффинных связностей естественным образом связанной с теорией алгебры.

Постоянная аффинная связность на многообразии Ω для натуральных поле реперов будет плоской тогда и только тогда, когда связанная с ней алгебра A является коммутативной и ассоциативной.

В настоящей работе поле реперов на многообразии Ω , в котором заданы постоянные коэффициенты связности, не обязательно быть натуральными.

I. Предположим, что на гладком многообразии Ω размерности n задана плоская аффинная связность. Тогда многообразие является локально аффинным и в малом допускает отображение на некоторую область D аффинного пространства A^n . Рассмотрим в A^n семейство аффинных реперов, состоящих из точки и n линейно независимых векторов. Уравнение инфинитезимального перемещения такого репера записывается в виде:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_j^i \vec{e}_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

где ω^i, ω_j^i - I-формы, удовлетворяющие структурным уравнениям,

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i. \quad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой условия интегрируемости уравнений (1).

Зададим в пространстве A^n поле реперов. Тогда форма ω_j^i , определяющие перемещение векторов $\vec{e}_i$ выразятся в виде:

$$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k \quad (3)$$

где Γ_{jk}^i - коэффициенты аффинной связности.

Если $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, то из первой группы уравнений (2) следует, что $d\omega^i = 0$

и $\omega^i = du^i$. В этом случае $\vec{e} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}$ и поле реперов в A^n будет натуральным.

Если же $\Gamma_{jk}^i \neq \Gamma_{kj}^i$, то поле реперов в A^n не является натуральным.

Будем искать в пространстве A^n такое поле реперов, для которого коэффициенты связности Γ_{jk}^i , входящие в уравнение (3), являются постоянными. Тогда из второй группы уравнений (2) следует, что

$$\Gamma_{jk}^i \Gamma_{em}^k \omega^e \wedge \omega^m = \Gamma_{je}^k \Gamma_{km}^i \omega^e \wedge \omega^m.$$

В силу косої симметрии и линейной независимости произведений $\omega^e \wedge \omega^m$ получим:

$$\Gamma_{jk}^i \Gamma_{em}^k - \Gamma_{jk}^i \Gamma_{me}^k = \Gamma_{je}^k \Gamma_{km}^i - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ke}^i. \quad (4)$$

Таким образом, если постоянные коэффициенты Γ_{jk}^i определяют на Ω плоскую аффинную связность, то они удовлетворяют соотношениями (4). Обращая предыдущие рассуждения, легко убедиться, что если постоянные коэффициенты Γ_{jk}^i удовлетворяют уравнениям (4), то они определяют на Ω плоскую аффинную связность.

II. Постоянные коэффициенты связности Γ_{jk}^i могут быть приняты за структурные константы некоторой n - мерной алгебры A . Обозначим через ε_i ее базисные элементы. Тогда любой элемент x ($x \in A$) представляется в виде $x = x^i \varepsilon_i$. Закон умножения базисных элементов в алгебре A задается формулой $\varepsilon_j \varepsilon_k = \Gamma_{jk}^i \varepsilon_i$. Ввиду этого, если $y = y^j \varepsilon_j$ то $xy = \Gamma_{jk}^i x^j y^k \varepsilon_i$.

Отсюда вытекает, что соотношения (4) эквивалентны следующему тождеству в алгебре A :

$$x(yz) - (xy)z = x(zx) - (xz)y, \quad (5)$$

где x, y, z – любые три элемента из A .

Обозначим через $[x, y, z]$ ассоциатор элементов x, y, z алгебры A , так что

$$[x, y, z] = x(yz) - (xy)z.$$

Тогда соотношение (5) переписывается в виде:

$$[x, y, z] = [x, z, y]. \quad (6)$$

Алгебры, удовлетворяющие условию (6), назовем правосимметричными [3]. Левосимметричные алгебры рассматривались в [2].

В силу вышеуказанного будет справедлива следующая теорема:

Теорема. Для того, чтобы коэффициенты Γ_{jk}^i определяли на многообразии Ω постоянную плоскую аффинную связность необходимо и достаточно, чтобы они были структурными константами правосимметричной алгебры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vranceanu G. Spazi a connessione affine e la algebrre di numeri ipercomplessi. – Ann. Scuola normale super. Pisa, 1958, 12, № 1-2, p.284-297.
2. Burde D. Left- Symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics // Central European J. Math. – 2006. – Vol. 4, no. 3. – p.323-357.
3. Козыбаев Д. Х., Умирбаев У.У. Вложение Магнуса для правосимметричных алгебр.// Сибирский математический журнал, май-июнь, 2004, Том 45, № 3, ст.592-599.

ПОВЕРХНОСТЬ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Тошматова М. М.

Ташкентский государственный транспортный университет

toshmatova_mm@mail.ru

Для плоских кривых определена эволюта – кривая, являющаяся геометрическим образом множества центров соприкасающихся окружностей [1,2].

Мы обобщаем понятие соприкасающихся окружностей для пространственной кривой.

Пусть пространственная кривая L задана векторным уравнением $\bar{r}(s)$, s – естественный параметр.

Рассмотрим кривые, кривизна и кручение которых отличны от нуля. Через $\tilde{L}$ обозначим проекцию кривой в окрестности точки $M(s_0) \in L$ на соприкасающейся плоскости.

Когда кривизна кривой L отлична от нуля в каждой точке кривой, существует соприкасающаяся окружность. В общем случае точки кривой L и точки соприкасающихся окружностей образуют некоторую поверхность в пространстве. Эту поверхность назовём поверхностью соприкасающихся окружностей.

Определение. Соприкасающейся окружностью пространственной кривой называем соприкасающуюся окружность проекции пространственной кривой на соприкасающейся плоскости.

Уравнения поверхности соприкасающихся окружностей для кривой L , заданной уравнением $\bar{r}(s)$, имеет вид

$$\bar{r}(s, v) = \bar{r}(s) + \frac{1}{|r'(s)|} (\sin v \cdot r'(s) + (1 - \cos v) r''(s)),$$

где параметр v – угол между радиусом соприкасающейся окружности и главной нормали кривой L .

Определение поверхности соприкасающихся окружностей дано А. Артикбаевым [3].

Имеется частные случаи: 1. Для винтовой кривой, поверхностью соприкасающихся окружностей является цилиндр, на котором лежит винтовая кривая.

2. Поверхностью соприкасающихся окружностей кривой на сфере является сама эта сфера.

Литература

[1] Кузовлев В.П., Подаева Н.Г. Курс геометрии: элементы топологии, дифференциальная геометрия, основания геометрии. —М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012 - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1360-1.

[2] Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия, первое знакомство, 1990

[3] Артикбаев А. Исмоилов Ш. Сечение сферы с плоскостью в изотропном пространстве, Scientific journal of Samarkand university, 2020, 5(123), 84-89

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ ОДНОЙ КС-МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЬМЯ СОСТОЯНИЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Хакимов Р.М, Тожибоев Б.З

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

e-mail: rustam-7102@rambler.ru, tbahtiyor2212@mail.ru

Пусть $\tau^k = (V, L)$ дерево Кэли порядка $k \geq 2$. Пусть $\Phi = \{0, 1, 2, 3\}$. Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в Φ . Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω .

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G . Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией, если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V . Обозначим множество G -допустимых конфигураций через Ω^G .

Множество активности [1] для графа G есть функция $\lambda: G \rightarrow R_+$.

Для данных G и λ определим гамильтониан G – КС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)}.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. например, [1]-[2]).

Определение 1. [3] Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и изучим соответствующие этому случаю периодические меры Гиббса. Известно [1], что существуют три типа плодородных графов с четырьмя вершинами 0,1,2,3 (на множестве значений $\sigma(x)$: палка, ключ, обобщенный ключ).

Рассмотрим случай $G = \{\text{ключ}\}$, который имеет вид:

$$\text{ключ}: \{0, 1\} \quad \{0, 2\} \quad \{1, 2\} \quad \{2, 3\}.$$

Пусть $L(G)$ -множество ребер графа G , обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \{i, j\} \in L(G) \\ 0, & \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Известно [3], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$\begin{aligned} z_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \\ z_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \\ z_{3,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}z_{3,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y} + a_{03}z_{3,y}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{3,x}$, $i = 0, 1, 2$.

Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$, соответственно. Пусть $\hat{G}_k$ является подгруппой группы G_k .

Определение 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ – периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$.

G_k – периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 3. Мера μ называется $\hat{G}_k$ – периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ – периодической совокупности величин z .

Рассмотрим $G_k^{(2)}$ – периодические меры Гиббса в случае $G = \{\text{ключ}\}$, где $G_k^{(2)}$ – подгруппа, состоящая из слов четной длины. В случае $G = \{\text{ключ}\}$ из (1) для $G_k^{(2)}$ – периодических мер получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_0 = \lambda \left(\frac{t_1 + t_2}{t_2} \right)^k & t_0 = \lambda \left(\frac{z_1 + z_2}{z_2} \right)^k \\ z_1 = \lambda \left(\frac{t_0 + t_2}{t_2} \right) & t_1 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2}{z_2} \right) \\ z_2 = \lambda \left(\frac{t_0 + t_1 + 1}{t_2} \right) & t_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_1 + 1}{z_2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим отображение $W: R^6 \rightarrow R^6$.

Лемма. Следующие множества являются инвариантными относительно отображения W :

$$I = \left\{ (z_0, z_1, z_2, t_0, t_1, t_2) \in R^6 : z_0 = t_1, z_1 = t_0, z_2 = t_2, z_0 \neq z_1 \right\}.$$

Теорема. Пусть $k = 2$. Для НС-модели в случае $G = \{\text{ключ}\}$ на инвариантных множества I , верны следующие:

(i) Пусть $k = 2$. Тогда все $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.

(ii) Пусть $k = 3$. Тогда при $\lambda > \frac{8}{81\sqrt[3]{2} - 54}$ существуют ровно два $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса

Замечание. В работе [4] изучены трансляционно-инвариантные меры Гиббса для НС модели с четырьмя состояниями.

Литература

[1] Георги Х.О., Гиббсовские меры и фазовые переходы., *Mup* (1992), (1987).

[2] Rozikov U. A., Gibbs Measures on Cayley Trees, *World Sci. Singapore*, 2013

[3] Brightwell G., Winkler P. *J. Combin. Theory Ser. B*, 75 (1999), 221-262

[4] Khakimov R.M. *JSFU*, 2015, 8(2), p.165-172.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ НС-БЛЮМА-КАПЕЛЯ В СЛУЧАЕ “ЖЕЗЛ” НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

¹Хатамов Н. М., ²Мирзаакбаров А. М.

¹Институт математики им. В.И.Романовского, АН РУз, Узбекистан,

²Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.

e-mail: nxatamov@mail.ru

Работа посвящена новому разделу теории мер Гиббса, так называемой градиентной мере Гиббса (см.[1]). В данной статье изучается модель НС-Блюма-Капеля со счетным множеством значений спина в случае "жезл" на дереве Кэли.

Дерево Кэли $\mathfrak{Z}^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ – бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро, где V есть множество вершин $\mathfrak{Z}^k$, L – его множество ребер. Если $i(l) = \{x, y\}$, то вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются через $\langle x, y \rangle$. Пусть $d(x, y), x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y , т.е. количество ребер кратчайший пути, соединяющей x и y .

Точка y называется "прямым потомком" точки x , если $x \prec y$ и $d(x, y) = 1$. Обозначим через $S(x)$ – множество "прямых потомков" точки $x \in V$.

Здесь рассмотрим множество $\mathbb{Z}$ как множество вершин некоторого бесконечного графа G . С помощью графа G определим G – допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G – допустимой конфигурацией на дереве Кэли если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V . Обозначим множество допустимых конфигураций через Ω^G .

Гамильтониан модели Блюма-Капеля определяется таким образом:

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y \rangle, x,y \in V} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \quad (1)$$

где $J \in \mathbb{R}$.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G . Обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=-1,0,+1}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ есть σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G . Понятие меры Гиббса и градиентных мер Гиббса для модели Блюма-Капеля определяется стандартным образом (см. [1], [2]).

Пусть $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Известно, что (см. [1]) каждой (градиентной) мере Гиббса на $(\Omega^G, \mathfrak{B})$ соответствует совокупность векторов $z_x = \{z_{i,x}, i \in \mathbb{Z}_0\} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}_0}$ такая, что $\forall x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0} \theta^{i^2} + \sum_{m \in \mathbb{Z}_0} a_{im} \theta^{(i-m)^2} z_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m \in \mathbb{Z}_0} a_{0m} \theta^{m^2} z_{m,y}}, \quad i \in \mathbb{Z}_0, \quad (2)$$

где $\theta = \exp\{-J\beta\}$, $\beta = 1/T$, T – температура.

Таким образом, задача описания (градиентных) мер Гиббса сведена к нахождению решений системы уравнений (2). Но изучать эту систему уравнений в случае произвольного графа G нелегко.

Поэтому, мы рассмотрим конкретный граф G , определенный следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = -1, j = -1 \text{ или } i = 1, j = 1, \\ 1, & \text{если } j = i + 1 \text{ или } j = i - 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где $i, j \in \mathbb{Z}$.

При таком графе из (2) получим

$$\begin{cases} z_{1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta + z_{1,y} + \theta z_{2,y}}{\theta(z_{-1,y} + z_{1,y})}, & z_{-1,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta + z_{-1,y} + \theta z_{-2,y}}{\theta(z_{-1,y} + z_{1,y})}, \\ z_{i,x} = \prod_{y \in S(x)} \frac{z_{i-1,y} + z_{i+1,y}}{z_{-1,y} + z_{1,y}}, & i \in \mathbb{Z}_0 \setminus \{-1, 1\}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим $G_k^{(2)}$ -периодические решения, которые соответствуют совокупности векторов $z_x = \{z \in \mathbb{R}_+^\infty : x \in G_k\}$ вида

$$z_x = \begin{cases} z, & \text{если } |x| - \text{четно}, \\ \tilde{z}, & \text{если } |x| - \text{нечетно}, \end{cases}$$

где G_k – циклическая группа и $|x|$ – число букв в слове $x \in G_k$ (см.[2]). В этом случае уравнение (3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{\theta + \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2}{\theta(\tilde{z}_{-1} + \tilde{z}_1)} \right)^k, \tilde{z}_1 = \left(\frac{\theta + z_1 + z_2}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_{-1} = \left(\frac{\theta + \tilde{z}_{-1} + \theta \tilde{z}_{-2}}{\theta(\tilde{z}_{-1} + \tilde{z}_1)} \right)^k, \tilde{z}_{-1} = \left(\frac{\theta + z_{-1} + \theta z_{-2}}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_i = \left(\frac{\tilde{z}_{i-1} + \tilde{z}_{i+1}}{\tilde{z}_{-1} + \tilde{z}_1} \right)^k, \tilde{z}_i = \left(\frac{z_{i-1} + z_{i+1}}{z_{-1} + z_1} \right)^k, i \in \mathbb{Z}_0 \setminus \{-1, 1\}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\theta > 0, z_i > 0$.

Предположим $z_2 = 1, \tilde{z}_2 = 1, z_{-2} = 1, \tilde{z}_{-2} = 1$ в системе уравнении (4). Тогда первое, второе, третье и четвертое уравнении этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\frac{2\theta + \tilde{z}_1}{\theta(\tilde{z}_{-1} + \tilde{z}_1)} \right)^k, \tilde{z}_1 = \left(\frac{2\theta + z_1}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, \\ z_{-1} = \left(\frac{2\theta + \tilde{z}_{-1}}{\theta(\tilde{z}_{-1} + \tilde{z}_1)} \right)^k, \tilde{z}_{-1} = \left(\frac{2\theta + z_{-1}}{\theta(z_{-1} + z_1)} \right)^k, z_{-3} = z_1, \tilde{z}_{-3} = \tilde{z}_1. \end{cases} \quad (5)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $k = 2$. Тогда для системы уравнений (5) существует $\theta_{cr} = 1/\sqrt[3]{2}$ такое, что при $\theta > \theta_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$ -периодическими решений $(z^*, z^*, z^*, z^*), (\hat{z}_1, \hat{z}_1, \hat{z}_{-1}, \hat{z}_{-1}), (\hat{z}_{-1}, \hat{z}_{-1}, \hat{z}_1, \hat{z}_1)$.

Из Теорема 1 следует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k = 2$. Тогда для модели НС-Блума-Капеля (соответствующей графу G) существует $\theta_{cr} = 1/\sqrt[3]{2}$ такое, что при $\theta > \theta_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$ -периодические градиентные меры Гиббса $\mu_0, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$, где мера является $G_k^{(2)}$ -периодическим (трансляционно-инвариантным) и меры $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ являются $G_k^{(2)}$ -периодическими (не трансляционно-инвариантными).

Список использованной литературы

- [1] Henning F., Kulske C., Le Ny A., Rozikov U. A. Gradient gibbs measures for the SOS-model with countable values on a Cayley tree. Electron. J. Probab., vol.24, 2019.
- [2] U.A. Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. 2013.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПОЛУОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Ходжаниязов А. Г., Кожамуратова Ш. Т.

*Нукусский государственный педагогический институт, Нукус,
Узбекистан*

Полуобратной матрицей для произвольной матрицы $A_{m \times n}$ называется матрица $A_{m \times n}^+$, которая удовлетворяет условию (см. [1]):

$$AA^+A = A \quad (1)$$

Если, кроме того, выполняется условие:

$$A^+AA^+ = A^+, \quad (2)$$

то матрицу A^+ называют взаимной полуобратной. Вычисляют полуобратную матрицу по формуле:

$$A^+ = T \left(\begin{array}{c} E_r \\ U \end{array} \right) (E_r | V) S,$$

где $U_{(n-r) \times r}$, $V_{r \times (m-r)}$, $T \in GL_n(\mathbb{C})$, $S \in GL_m(\mathbb{C})$. В частности, если положить U и V - нулевые матрицы, то одна из полуобратных матриц имеет вид $A^+ = T \Lambda^T S$, где Λ - простейшая матрица [2].

Теперь приведем алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений [3] с помощью полуобратных матриц:

1. Привести основную матрицу A к виду $\Lambda = SAT$, то есть найти S , T , Λ и найти ранг матрицы A , $r = \text{rank}(A)$.

2. Проверить условие совместности, где $\Psi = \left(\begin{array}{c|c} O_r & O_{r \times (m-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & E_{m-r} \end{array} \right) S$. Если

$r < m$, то составить матрицу Ψ и проверить условие $\Psi b = 0$. Если условие выполняется, то система совместна, если нет, то система несовместна и решения нет.

3. Найти частное решение $x^0 = A_0^+ b = T \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) S b$.

4. Составить фундаментальную матрицу $\Phi = T \left(\begin{array}{c} O_r \\ \hline E_{n-r} \end{array} \right)$.

5. Записать общее решение $x = x' + x^0 = x^0 + \Phi C$.

Пример. Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^n$, переходящие в вектор $b \in \mathbb{R}^m$ при линейном отображении $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданном матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Задачу можно свести к решению системы линейных

уравнений вида:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$$

Решаем систему по вышеприведенному алгоритму:

1. Найдем матрицы S , T , Λ и ранг матрицы A , $r = \text{rank}(A)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_4 \\ \hline E_5 & \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \Lambda & S \\ \hline T & \end{array} \right), \text{ где } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \text{rank}(A) = 3.$$

2. Проверяем условие совместности $\Psi b = 0$, так как $r = 3 < 4 = m$

(где m количество строк в A): $\Psi_{m \times m} = \Psi_{4 \times 4} = \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & E_{m-r} \end{array} \right) S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и

записываем условие $\Psi b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$, условие выполняется

и система совместна.

3. Находим частное решение:

$$x' = A_0^+ b = T \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) S b = T \Lambda^T S b = \begin{pmatrix} -\frac{15}{8} & 0 & -\frac{3}{4} & -5 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

4. Составим фундаментальную матрицу однородной системы:

$$\Phi = T \left(\begin{array}{c|c} O & \\ \hline E_{n-r} & \end{array} \right) = T \left(\begin{array}{c|c} O_{3 \times 2} & \\ \hline E_2 & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \text{ Записываем общее решение: } x = x' + x^0 = \begin{pmatrix} -\frac{15}{8} \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Использованная литература

- [1] Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
- [2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. - 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 17стр.
- [3] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. - 6-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 63стр.
- [4] Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. 3-е изд., М., 2001. 31-32стр.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ИЗОМЕТРИЧНЫХ ПО СЕЧЕНИЯМ R^4

Шарипов А.С., Усмонхужаев З.Ю.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: asharipov@inbox.ru , zokusm@gmail.com

В настоящей работе изучаются некоторые свойства гиперповерхностей изометричных по сечениям в четырехмерном евклидовом пространстве R^4 .

Определим 3 -мерное подмногообразие 4 -мерного евклидова пространства R^4 . В качестве пространства, в котором изменяются параметры (u^1, u^2, u^3) , возьмем пространство R^3 , причем можем считать, что u^i — декартовы координаты в R^3 . Будем предполагать, что эти параметры изменяются в некоторой области $D \subset R^3$. Например, в качестве области D возьмем 3-мерный шар, определяемый неравенством

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 < R^2,$$

где R — радиус шара.

Определение 1. Элементарным 3 -мерным подмногообразием евклидова пространства R^4 называется образ 3-мерного шара D при топологическом отображении его в R^4 и обозначается через F^3 [1].

Понятие изометрии по сечениям поверхностей в R^4 введено следующим образом: рассматриваются гиперповерхности в 4-мерном евклидовом пространстве, сечения (P^j) которых гиперплоскостями (π / P^j) , перпендикулярными некоторому вектору $\vec{e}$, являются 2-мерным

многообразием. Класс гиперповерхностей, для которых сечения гомеоморфным либо сфере S^2 , либо R^2 или ее части, обозначим через $W\{\vec{e}\}$.

Определение 2. Гиперповерхности F_1 и F_2 называются изометричными по сечениям, если существуют направления $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, перпендикулярно которым проводятся сечения поверхностей F_1 и F_2 соответственно так, что выполнены следующие условия:

а) каждому сечению $P_1^j \subset F_1$ изометрично сопоставляется сечение $P_2^j \subset F_2$;

б) расстояния между гиперплоскостями соответствующие сечениям P_1^i и P_1^j и гиперплоскостями соответствующие сечениям P_2^i и P_2^j равны [2].

Переходим к изучению свойств изометричных по сечениям гиперповерхностей в R^4 . Выберем декартову систему координат $OXYZT$ следующим образом: ось OT направим по вектору $\vec{e}_1$, при этом гиперплоскости, перпендикулярные вектору $\vec{e}_1$, будут параллельными координатной гиперплоскости $OXYZ$. Тогда любая регулярная гиперповерхность F может быть задана векторным уравнением

$$r(u^1, u^2, u^3) = u^1 \vec{e}_1 + x(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_2 + y(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_3 + z(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_4$$

(1)

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ единичные орты.

Найдём касательные векторы координатных линий гиперповерхности

(1)

$$r_{u^1} = \vec{e}_1 + x_{u^1}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_2 + y_{u^1}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_3 + z_{u^1}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_4$$

$$r_{u^2} = x_{u^2}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_2 + y_{u^2}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_3 + z_{u^2}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_4$$

$$r_{u^3} = x_{u^3}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_2 + y_{u^3}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_3 + z_{u^3}(u^1, u^2, u^3) \vec{e}_4$$

Тогда нормаль гиперповерхности имеет следующий вид:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ 1 & x_{u^1} & y_{u^1} & z_{u^1} \\ 0 & x_{u^2} & y_{u^2} & z_{u^2} \\ 0 & x_{u^3} & y_{u^3} & z_{u^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{u^1} & y_{u^1} & z_{u^1} \\ x_{u^2} & y_{u^2} & z_{u^2} \\ x_{u^3} & y_{u^3} & z_{u^3} \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & y_{u^1} & z_{u^1} \\ 0 & y_{u^2} & z_{u^2} \\ 0 & y_{u^3} & z_{u^3} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & x_{u^1} & z_{u^1} \\ 0 & x_{u^2} & z_{u^2} \\ 0 & x_{u^3} & z_{u^3} \end{vmatrix} \vec{e}_3 - \begin{vmatrix} 1 & x_{u^1} & y_{u^1} \\ 0 & x_{u^2} & y_{u^2} \\ 0 & x_{u^3} & y_{u^3} \end{vmatrix} \vec{e}_4 =$$

$$= \Delta_1 \vec{e}_1 - \Delta_2 \vec{e}_2 + \Delta_3 \vec{e}_3 - \Delta_4 \vec{e}_4.$$

В каждой обыкновенной точки гиперповерхности F или некоторой части проведём к ней нормаль $\vec{n}$. Рассмотрим цилиндр с направляющим $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и с образующими параллельными вектору $\vec{e}_1$.

Чтобы отобразить точку $M(u^1, u^2, u^3)$ гиперповерхности на цилиндр, из начала координат провести вектор η со направленный с вектором $\vec{n}$

$$\eta = \left\{ -\frac{\Delta_1}{\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2}}; -\frac{\Delta_2}{\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2}}; -\frac{\Delta_3}{\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2}}; -\frac{\Delta_4}{\sqrt{\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2}} \right\}$$

его конец будет на цилиндре и может быть принята за изображение M' точки M гиперповерхности. Отобразив, таким образом, каждую точку гиперповерхности или точку некоторой её области на цилиндр, получим цилиндрический образ этой области гиперповерхности F [3].

Так как поверхность F из класса $W\{\vec{e}\}$, то она не имеет опорных плоскостей перпендикулярные вектору $\vec{e}_1$, плоскости перпендикулярные вектору $\vec{e}_1$ могут быть опорными лишь в краевых точках поверхности F . В таких точках цилиндрического образа считаем бесконечным.

Теорема. Регулярные поверхности $F_1: r_1 = u^1 \vec{e}_1 + x \vec{e}_2 + y \vec{e}_3 + z \vec{e}_4$ и $F_1: r_1 = u^1 \vec{e}_1 + (u^1 \alpha + x) \vec{e}_2 + (u^1 \beta + y) \vec{e}_3 + (u^1 \gamma + z) \vec{e}_4$ являются изометричными по сечениям по направлению $\vec{e}_1$ и их объёмы цилиндрических изображений равны.

Литература

- 1.Аминов Ю.А Геометрия подмногообразий. Киев Наукова Думка. 2022г, с 29-32
2. Шарипов А.С. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям R^4 . Узбекский Математический Журнал.1998 г, №3, с 98-103.
- 3.Sharipov A. S. Topvoldiyev F. F. On Invariants of Surfaces with Isometric on Sections," Mathematics and Statistics vol. 10, no. 3, pp. 523-528, 2022. DOI: 10.13189/ms.2022.100307

ФУНКТОР ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР И РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Эшкобилова Д. Т.

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Пусть X – компактное Хаусдорфово пространство, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определяются $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *идемпотентной вероятностной мерой* на X , если он обладает следующими свойствами:

- (1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X – постоянная функция (нормированность);
- (2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность относительно операции $\odot$);

(3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность операции $\oplus$).

Для компактного Хаусдорфова пространства X через $I(X)$ обозначим множество всех идемпотентных вероятностных мер на X . Поскольку, $I(X) \subset \mathbb{R}^{C(X)}$, то можно рассматривать $I(X)$ как подпространство $\mathbb{R}^{C(X)}$. Семейство множеств вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon \}, \quad i = 1, \dots, n$$

является базой открытых окрестностей данной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ согласно индуцированной топологии, где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$ и $\varepsilon > 0$. Очевидно, что индуцированная топология и топология поточечной сходимости на $I(X)$ совпадают.

Пусть X, Y – компактные Хаусдорфовы пространства, а $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Несложно проверить, что отображение $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$, определяемое формулой $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$, непрерывно. Конструкция I является нормальным функтором, действующим в категории компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. Следовательно, для каждой идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ можно определить ее носитель:

$$\text{supp } \mu = \bigcap \{ A \subset X : \bar{A} = A, \mu \in I(A) \},$$

где $\bar{A}$ – замыкание множества A .

Предложение 1. $I_\beta(X)$ униформизуемо.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение тихоновских пространств, а $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$ – его максимальное расширение (оно единственно). Тогда $I(\beta f)(I_\beta(X)) \subset I_\beta(Y)$. Полагая

$$I_\beta(f) = I(\beta f)|_{I_\beta(X)}.$$

Таким образом, операция I_β , переводя тихоновские пространства в тихоновские пространства, и непрерывные отображения тихоновских пространств в непрерывные отображения тихоновских пространств, является функтором, действующим в категории *Tych* – тихоновских пространств и их непрерывных отображений.

Предложение 2. Если $i : (X, \mathcal{E}) \rightarrow (Y, \mathcal{F})$ является равномерным вложением, то $I_\beta(i) : (I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E})) \rightarrow (I_\beta(Y), I_\beta(\mathcal{F}))$ также является равномерным вложением.

Теорема 1. Равномерное пространство $(X, \mathcal{E})$ предкомпактно, если и только если равномерное пространство $(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E}))$ является предкомпактным.

Теорема 2. Пусть $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Отображение $I_\beta(f) : I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$ является совершенным тогда и только тогда, когда $f : X \rightarrow Y$ совершенно.

Лемма 1. Пусть $(X, \mathcal{E})$ – равномерное пространство, а $(Y, \mathcal{E}|_Y)$ – его подпространство, где $\mathcal{E}|_Y = \{E \cap (Y \times Y) : E \in \mathcal{E}\}$. Тогда $w(\mathcal{E}|_Y) \leq w(\mathcal{E})$.

Теорема 3. Имеет место равенство $w(I_\beta(\mathcal{E})) = w(\mathcal{E})$.

Индекс полноты равномерного пространства $(X, \mathcal{E})$ обозначается $ic(\mathcal{E})$

Теорема 4. Имеет место $ic(I_\beta(\mathcal{E})) = ic(\mathcal{E})$.

Теорема 5. Пусть $f : (X, \mathfrak{A}) \rightarrow (Y, \mathfrak{V})$ — равномерно непрерывное отображение. Отображение $I_\beta(f) : (I_\beta(X), \mathfrak{A}_I) \rightarrow (I_\beta(Y), \mathfrak{V}_I)$ равномерно открыто тогда и только тогда, когда f равномерно открыто.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.M.Zarichnyi, Spaces and maps of idempotent measures. *Izv. Math.*, 74:3(2010), 481–499.

[2] D.T.Eshkobilova, Lifting the functor I_β to the category of uniform spaces. *Physical and mathematical sciences*, 4(2020), 29–39.

[3] A.Ya. Ishmetov, On functor of idempotent probability measures with compact support., *Uzbek mathematical journal*, 1(2010), 72–80.

[4] A.A.Zaitov, A.Ya.Ishmetov, On monad generating by the functor I_β , *Vestnik of National university of Uzbekistan*, 2(2013), 61–64.

[5] D.T.Eshkobilova, Kh.F.Kholturaev, The functor of idempotent probability measures and completeness index of uniform spaces. *Uzbek mathematical journal*, 1(2021), 65–79.

[6] A. A. Borubaev, D. T. Eshkobilova, The functor of idempotent probability measures and maps with uniformity properties of uniform spaces, *Eurasian Math. J.*, 2021, Volume 12, Number 3, 29–41.

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И УБЕГАНИЯ НА РЕБЕРНЫХ ОСТОВАХ ПРАВИЛЬНЫХ ПИРАМИД

Юлдашева Н. И., Маматов М. Ш.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
e-mail: z_d2014@mail.ru

Задан M – граф одномерного остова правильных пирамид M , которого обозначим той же буквой M . В игре по графу M будут передвигаться

точки P_1 , P_2 и Q со скоростью, не превышающей по модулю ρ , $\rho=1$ и все ребра имеют длины 1. Точки P_1 , P_2 называются преследователями и их группа P (т.е. набор) составляет игрока-преследователя. Точка Q представляет собой убегающего игрока. В начальный момент времени $t=0$ точки занимают какие-то положения $P(0)$ и $Q(0)$. Если каждый из игроков выберет определенный способ управления, то точки движутся по определенным траекториям $P(t)$, $Q(t)$. Способы управления должны обеспечить фазовое ограничение $P_k(t), Q(t) \in M$ при всех $t \geq 0$, $k=1,2$. В процессе доказательства строятся конкретные способы управления группы преследователей U^* и убегающей точки V^* , обладающие следующими свойствами:

1°. Для любого начального состояния $P(0)$, $Q(0)$ и измеримого управления $v(t)$, $|v(t)|=1$ почти всюду на $[0, \infty)$, данные $P(0)$, $Q(0)$, $v(\cdot)$, U^* порождают траектории $P(t)$, $Q(t)$ так, что $P_k(t) = Q(t)$ для некоторых $k=1,2$ и $t \geq 0$.

2°. Существует начальное состояние $P(0)$, $Q(0)$ такое, что для любых измеримых управлений $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, $|u_k(t)|=1$ почти всюду на $[0, \infty)$, $k=1,2$ данные $P(0)$, $Q(0)$, $u(\cdot)$, V^* порождают траектории $P(t)$, $Q(t)$ так, что имеет место $P_k(t) \neq Q(t)$ для всех $k=1,2$ и $t \geq 0$. (Заметим, что в нашем случае траектории будут определены единственным образом.)

Из условий 1° и 2° видно, что здесь рассматривается игра преследования-убегания с точной поимкой. Отметим, что свойства 1° и 2° являются независимыми – в условии 1° способ управления преследователя U^* действует против произвольных допустимых управляющих функций $v(\cdot)$ убегающего, в то же время как в условии 2° способ управления убегающего V^* сравнивается с произвольным набором допустимых управлений $u(\cdot)$ группы преследователей. При этом, исходя из того, что рассматривается точная поимка, способ управления убегающего выбирается в виде позиционной стратегии, точнее говоря, исходя из информации $P(s), Q(s)$, $0 \leq s \leq t$, где t – текущий момент времени, а способ управления группы преследователей выбирается в виде контр стратегии, т.е. исходя из информации о $P(s), Q(s)$, $0 \leq s \leq t$, и еще о значении $v(t)$.

В данной работе для правильной пирамиды M доказано, что для того чтобы поймать убегающего достаточно два преследователя. При этом в процессе решения задачи преследования для каждого тетраэдра M будет указано положительное число $T(M)$, такое, что равенство $P_k(t) = Q(t)$ в свойстве 1° будет иметь место при некотором $t \in [0, T(M)]$.

Случай: M – тетраэдр с основанием квадрата. Пусть M – правильная пирамида (тетраэдр с основанием квадрата). Достаточно по-

казать, что два преследователя P_1, P_2 поймают убегающего Q . Предпишем преследователю P_1 занять ближайшую вершину M , скажем A – на это потребуется время не больше 0,5. После этого преследователь P_2 начинает преследовать Q . Заставив его пройти через какую-то вершину B многогранника M – на это потребуется время, как легко вычислить, не больше 1,5 (наихудшее положение перед началом процесса преследования Q со стороны P_2 – это когда P_2 находится в середине какого-то ребра с концом A , а Q – на противоположном ребре). Пусть $t = \tau$ – момент времени, когда Q оказался в вершине B , так что $\tau \leq 4$. Можно считать $B \neq A$. Начиная с этого момента времени, P_2 продолжит преследование Q . Заставляя убегающего уйти из вершины B , а точке P_1 предписывается двигаться симметрично к Q относительно плоскости симметрии M , проходящей через середину ребра AB . За время, не превосходящее 3,5, либо P_1 и Q одновременно окажутся в точке, лежащей на плоскости симметрии, либо Q будет пойман преследователем P_2 .

Следствие. Для правильной пирамиды с основанием квадрата время поимки. $T(\text{правильной пирамиды с основанием квадрата}) \leq 5,5$

Случай: M – тетраэдр с основанием пятиугольника. Пусть M – правильная пирамида (тетраэдр с основанием пятиугольника).

И здесь P_1 займет положение в какой-то вершине A и будет ждать там, пока P_2 не заставит Q пройти через одну из вершин, соседних с A . Преследователь P_2 может осуществить это, например, сначала добравшись до вершины $\bar{A}$ (здесь и в дальнейшем антиподальная точка обозначается чертой сверху), затем направляясь в сторону Q . Таким образом, за время, не превосходящее 6,5, точки P_1 и Q окажутся одновременно в соседних вершинах A и B соответственно.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

[1] Маматов М.Ш., Нуриддинов Н.Т., Эсонов Э.Э. Дифференциальные игры дробного порядка с распределенными параметрами// *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*, 2021, № 4, 38-47.

[2] Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987, 431 с.

[3] Абдулла А. Азамов, Атамурат Ш. Кучкаров, Азамат Г. Холбоев. Игра преследования-убегания на реберном остовах правильных многогранников. I. *Теория игр и ее приложения*. 2015, Т. 7, В. 3, С. 3–15.

СЕКЦИЯ №2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

PARABOLIK RIMAN SIRTLARIDA ANALITIK FUNKSIYALARNI YAQINLASHTIRISH

Abdullaeva Z., Bekchanov S.

Urganch davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston

Bir bog'lamli Riman sirtlari 3 hil turga bo'linadi: elliptik, parabolik va giperbolik. Elliptik sirtlar yopiq bir bog'lamli sirtlar bo'lib, uniformatsiya teoremasiga ko'ra Riman sferasida akslantirish mumkin. Parabolik sirtlar kompleks tekislik (∞ nuqtasiz) bilan konformal ekvivalent bo'lib, giperbolik sirtlarni birlik doiraga konform akslantirilishi mumkin.

Biz ushbu tadqiqot ishida umuman parabolik Riman sirtlarida analitik funksiyalarni o'rganamiz.

Ta'rif 1. Agar R ochiq Riman sirtida o'zgarmasdan farqli manfiy subgarmonik funksiyalar mavjud bo'lmasa, bu Riman sirti parabolik deyiladi. Parabolik bo'lmagan barcha ochiq Riman sirtlari giperbolik deb ataladi.

Parabolik Riman sirtlari uchun boshqa alternativ ta'riflar juda ko'p ular quyidagi tasdiqlarda o'z aksini topadi.

Teorema1. ([2]) Quyidagi shartlardan biri bajarilgan Riman sirti parabolik bo'ladi:

(I) Maksimum prinsipi amal qiladi.

(II) Grin funksiyasining mavjud emasligi.

Parabolik Riman sirtlarini tavsiflashda yana bir muhim jihatlaridan biri bu maxsus potensial funksiyaning mavjud bo'lishidir.

Evans-Selberg potentsiali. R_0 ochiq Riman sirti bo'lsin.

Quyidagi 3 ta xossaga ega bo'lgan $h(z)$ funksiya R_0 Riman sirti uchun $\xi \in R_0$ qutbli Evans-Selberg potentsiali deb ataladi:

(a) h funksiya R_0 ochiq Riman sirtida garmonik, ξ nuqtadan tashqari.

(b) $h(z) - \log|z - \xi|$ funksiya ξ nuqtaning o'yilgan atrofidan ξ nuqtaga garmonik ravishda davom etadi.

(c) z nuqta R_0 ochiq Riman sirtining Aleksandrov chegaraviy nuqtasi a_∞ nuqtaga intilsa, $h(z)$ funksiya ∞ nuqtaga intiladi.

Teorema 2. ([2]): R_0 ochiq Riman sirti parabolik bolishligi uchun unda Evans-Selberg potentsiali mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Shunday qilib har qanday parabolik Riman sirti R_0 uchun shunday $h(z)$ potensial funksiya mavjud bo'lib, bu funksiya bitta θ nuqtadan tashqarida garmonik va R_0 ni barcha nuqtalarida subgarmonik bo'ladi. $z \rightarrow \theta$ nuqtada $h(z) \sim \ln|z - \theta|$ ekvivalent bo'lib, z nuqta R_0 parabolik Riman sirtining

chegarasiga intilsa, $h(z) \rightarrow \infty$. Bu degani $\forall c \in \mathbb{R}$ son uchun $\{h(z) < c\} \subset \subset \mathbf{R}_0$ munosabat bajariladi. Maxsus $h(z)$ potensial funksiyaning mavjud bo'lishi parabolik Riman sirtlarida sodda funksiyalarni (ko'phadlarni) aniqlash imkonini beradi. Parabolik Riman sirti $\mathbf{R}_0$ va unda aniqlangan $\rho(z)$ maxsus potensial funksiya berilgan bo'lsin. $\mathcal{O}(\mathbf{R}_0)$ orqali $\mathbf{R}_0$ da aniqlangan barcha golomorf funksiyalar to'plamini belgiyemiz.

Ta'rif 2. Agar $f \in \mathcal{O}(\mathbf{R}_0)$ funksiya uchun shunday musbat c_f, d sonlar topilib, barcha $z \in \mathbf{R}_0$ uchun

$$M|f(z)| \leq c_f(1 + e^{\rho(z)})^d \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f funksiyaga ko'phad deyiladi va yuqoridagi (1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun d sonlar orasidan eng kichigi ko'phadning darajasi deyiladi. $\mathcal{P}_\rho(\mathbf{R}_0)$ orqali $\mathbf{R}_0$ da aniqlangan barcha ko'phadlar fazosini belgilaymiz.

A.Sadullaev va A.Aytuna[1] tomonidan ko'phadlar fazosi faqat o'zgarmas funksiyalar bo'lgan parabolik Riman sirtiga misol ko'rsatilgan.

Ta'rif 3. Agar $\overline{\mathcal{P}_\rho(\mathbf{R}_0)} = \mathcal{O}(\mathbf{R}_0)$ munosabat bajarilsa, u holda $\mathbf{R}_0$ parabolik Riman sirti regular deyiladi.

Ushbu ishning asosiy natijasi quyidagi teoremdan iborat

Teorema A. $\mathbf{R}_0$ regular parabolik Riman sirti va $K \subset \mathbf{R}_0$ kompakt to'plam $\mathcal{P}_\rho$ –qavariq to'plam bo'lsin. Agar $f(z)$ funksiya K to'plam atrofida golomorf bo'lsa, u holda $\exists P_n(z)$ ko'phadlar ketma-ketligi topilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(z) - P_n(z)\|_K = 0$$

bo'ladi.

Adabiyotlar

[1] Aytuna A., Sadullaev A., Polynomials on Parabolic Manifolds, Contemporary mathematics No 662, 2016, pp. 1-22 (arXiv:1504.08092v1 [math.CV] 30 Apr 2015).

[2] Sario L., Nakai M., Classification theory of Riemann surfaces, Springer-Verlage Berlin-Heidelberg 1970.

m – PLYURISUBGARMONIK FUNKSIYALAR VA ULARNING BA'ZI XOSSALARI

Axmedov Q. Yu.

Urganch davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston

e-mail: qurbonbayaxmedov@urdu.uz

Ma'lumki so'ngi yillarda n o'lchamli haqiqiy Evklid fazosida m o'lchamli tekisliklar bilan kesimlarida subgarmoniklik xususiyatiga ega bo'lgan funksiyalar zamonaviy geometriyaning tadqiqot obektiga aylandi. Bu yo'nalishda F.R. Harvey va H.B.Lawson [4-7], B.D. Drnovšek, F. Forstnerič [3] va boshqa matematiklar

tomonidan muhim natijalar olingan. Funktsiyalar nazariyasida bu kabi funktsiyalar bilan parallel ravishda kompleks fazolarda kompleks tekisliklar bilan kesimlarida subgarmoniklik xususiyatiga ega bo'lgan m -subgarmonik funktsiyalar nazariyasi ham rivojlangan. Bu yo'nalishda D. Joyce [8], M. Verbitsky [9], B.I. Abdullayev [1-2] ishlari alohida ahamiyatga ega. Biz ushbu tadqiqot ishida m -plyurisubgarmonik funktsiyalarni m -subgarmonik funktsiyalar yordamida o'rganishni maqsad qilganmiz. Dast avval ular orasidagi bog'liklarni o'rganamiz.

1-ta'rif. $\hat{D} \subset \mathbb{C}^n$ sohada $u(z) \in L_{loc}^1(\hat{D})$ funktsiya berilgan bo'lsin. Agar bu funktsiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

$$1) \hat{D} \text{ da yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni } \overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$

$$2) \hat{D} \text{ da } dd^c u \wedge (dd^c |z|^2)^{m-1} = dd^c u \wedge \beta^{m-1} \geq 0, \text{ ya'ni } \forall \omega \in F^{(n-m, n-m)}, \omega \geq 0$$

$$\text{da } dd^c u \wedge (dd^c |z|^2)^{m-1}(\omega) = \int u (dd^c |z|^2)^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0 \text{ bo'lsa;}$$

u holda $u(z)$ funktsiya $\hat{D}$ sohada m -subgarmonik (m o'lchamli kompleks $\Pi^c \subset \mathbb{C}^n$ ($\dim_{\mathbb{C}^n} \Pi^c = m$) tekislikda subgarmonik funktsiya, $1 \leq m \leq n$) deyiladi.

Bu funktsiyalarning haqiqiy fazoladagi analoglarini m -plyurisubgarmonik funktsiyalar deymiz. $\mathbb{R}^n$ fazoda m -plyurisubgarmonik funktsiyalar quyidagicha aniqlanadi.

2-Ta'rif. Bizga $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $u(x) \in L_{loc}^1(D)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Agar bu funktsiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

$$1) D \text{ sohada yuqoridan yarim uzluksiz ya'ni, } \overline{\lim_{x \rightarrow x^0}} u(x) \leq u(x^0);$$

$$2) \text{ Har bir } m \text{ o'lchamli haqiqiy } \Pi \subset \mathbb{R}^n \text{ (} \dim_{\mathbb{R}^n} \Pi = m \text{) tekislik uchun, } u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D) \text{ bo'lsa;}$$

u holda $u(x)$ funktsiyaga D sohada m -plyurisubgarmonik funktsiya (m o'lchamli haqiqiy tekislikda subgarmonik funktsiya, $1 \leq m \leq n$) deyiladi.

Izoh: $u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D)$ funktsiya $m=1$ bo'lgan holda $u|_{\Pi}$ qavariq funktsiya bo'ladi.

Bunday funktsiyalar sinfini $m - psh(D)$ kabi belgilaymiz. Qulaylik uchun $u \equiv -\infty$ ni ham $m - psh(D)$ sinfga kiritamiz. $D \subset \mathbb{R}^n$ sohadagi $m - psh$ funktsiyalar $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada subgarmonik bo'ladi. Bundan tashqari $m - psh$ funktsiyalar ham subgarmonik funktsiyalarning barcha xossalari qanoatlantiradi.

$m - psh$ funktsiyalarning xossalari:

$$1\text{-xossa. Agar } u_j(x) \in m - psh(D), \quad a_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, k \text{ bo'lsa, u holda } a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_k u_k(x) \in m - psh(D);$$

$$2\text{-xossa. Agar } u_j(x) \in m - psh(D), \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad j=1, 2, \dots \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) = u(x) \in m - psh(D);$$

3-xossa. Agar $u_j(x) \in m - psh(D)$, $j = 1, 2, \dots$, $u_j(x) \Rightarrow u(x)$, u holda $u(x) \in m - psh(D)$;

4-xossa. (Maximum prinsipi) Agar $u(x) \in m - psh(D)$ va $x^0 \in D$ uchun $u(x^0) = \sup_{z \in D} u(x)$ bo'lsa, u holda $u(x) = \text{const}$ bo'ladi;

5-xossa. Agar $u_1(x), u_2(x) \in m - psh(D)$ bo'lsa, u holda $\max\{u_1(x), u_2(x)\} \in m - psh(D)$ bo'ladi;

Teorema. $u(x) \in C^2(D)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}_x^n$ sohada m -plyurisubgarmonik funksiya bo'lishi uchun $\hat{u}(z)|_{\Pi^c} = u(x)|_{\Pi}$ funksiyaning $\hat{D} \subset \mathbb{C}^n$ sohada m -subgarmonik bo'lishi zarur va yetarli.

Adabiyotlar

[1] Абдуллаев Б.И., $m - wsh$ функции.// Доклады Академии наук Республики Узбекистан, – Ташкент, 2012. – №5, – С. 15 – 18.

[2] Abdullayev B.I., Subharmonic functions on complex Hyperplanes of// Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, Krasnoyarsk, 2013. – № 6(4), – pp. 409–416.

[3] Drnovšek, B.D., Forstnerič F.: Minimal hulls of compact sets in $\mathbb{R}^3$. Trans. Am. Math. Soc. **368**(10), 7477–7506, October 2016.

[4] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., An introduction to potential theory in calibrated geometry. Amer. J. Math., V. 131, no. 4, (2009), 893-944.

[5] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Duality of positive currents and plurisubharmonic functions in calibrated geometry. Amer. J. Math., V. 131, no. 5, (2009), 1211-1240.

[6] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Geometric plurisubharmonicity and convexity – an introduction. Advances in Mathematics, V. 230, (2012), 2428-2456.

[7] Harvey F. R. and Lawson H. B. Jr., Plurisubharmonicity in a general geometric context. Geometry and Analysis I, (2010), 363-401.

[8] Joyce D., Riemannian holonomy groups and calibrated geometry. Oxford University Press, – U.S.A. 2007. – 318 p.

[9] Verbitsky M., Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q -convexity // Mathematische Zeitschrift, V.264, 2010. – №4, – pp. 939–957.

KLASSIK SOHALARDA ORTONORMAL SISTEMALAR

Bobojonova D.R., Boboyarova N.A.

Urganch davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston

e-mail: durposhshabobojanova@mail.ru, boboyarova@gmail.com

Ayni vaqtda, (bir o'lchamli) klassik kompleks analizning ko'pgina masalalari hanuzgacha ko'p o'lchamli holda bir qiymatli analoglariga ega emas. Bu ko'p o'lchamli kompleks fazo (strukturasining) tuzilishining murakkabligi,

ixtiyoriy soha uchun universal Koshi integral formulasining mavjud emasligi va boshqalar bilan bog'liq. E.Kartan [1] va Xua Lo-kenning [2] ishlarida ko'p o'lchamli kompleks analiz nazariyasini tavsiflashga matritsaviy yondashuv keng qo'llanilgan. Ular asosan klassik sohalarida ilmiy ishlar olib borganlar. Bu klassik sohalar o'rganishning muhimligi shundaki, ular keltirilmaydigan, ya'ni bu sohalar qaysidir ma'noda ko'p o'lchamli fazoning model sohalaridir. Bu maqolada klassik sohalarida ortonormal sistemalari keltiramiz.

1935 yilda E. Kartan tomonidan keltirilmaydigan chegaralangan simmetrik sohalar sinflarining oltita tipi borligi keltirildi va ulardan to'rttasiga tegishli bo'lgan sohalar klassik sohalar deb ataldi, chunki ular avtomorfizmlari gruppasi yarim oddiy Li gruppalaridir. Bu klassik sohalar quyidagilar (qarang [1-2]):

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_I(m, k) &= \{Z \in \mathbb{C}[m \times k]: I^{(m)} - ZZ^* > 0\}, \\ \mathfrak{R}_{II}(m) &= \{Z \in \mathbb{C}[m \times m]: I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z\}, \\ \mathfrak{R}_{III}(m) &= \{Z \in \mathbb{C}[m \times m]: I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = -Z\}, \\ \mathfrak{R}_{IV}(n) &= \left\{z \in \mathbb{C}^n: \left|\langle z, z \rangle\right|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, \left|\langle z, z \rangle\right| < 1\right\},\end{aligned}$$

bu yerda $I^{(m)}$ – m -tartibli birlik matritsa, Z^* – matritsa esa Z matritsaning qo'shmasi va transponirlanganidir (H Ermit matritsasi uchun $H > 0$ belgi, H musbat aniqlanganligini, ya'ni uning barcha xos sonlarining musbat ekanligini bildiradi). Bu sohalarining barchasi markazi O nuqtada (O – nol matritsa) bo'lgan bir jinsli, simmetrik, qavariq, to'la doiraviy sohalaridir. Bu sohalarining barchasi o'zaro bigolomorf ekvivalent emas, shuning uchun kompleks analiz ularning har biri uchun alohida quriladi

Aytaylik bizga $\mathfrak{R}$ klassik soha berilgan bolib, $\wp$ esa uning ostovi bo'lsin.

Bu sohadagi $z \in \mathfrak{R}$ vektor uchun komponentalari ushbu ko'rinishda bo'lgan

$$\sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}} z^\alpha = \sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i, \quad |\alpha| \geq 0 \quad (1)$$

$z^{[\alpha]}$ vektorni qaraymiz. Odat bu (1) ko'rinishdagi

$$\sqrt{\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!}} z^\alpha$$

funksiyalar sistemasiga bir jinsli golomorf monomlar deyiladi. $z^{[\alpha]}$ vektorni o'lchami esa quyidagicha topiladi (qarang [2]):

$$N_\alpha = \frac{1}{|\alpha|!} n(n+1)(n+2) \dots (n+|\alpha|-1) = C_{n+|\alpha|-1}^{|\alpha|}.$$

Masalan, $n = 2$, $|\alpha| = 3$ bo'lsin. U holda $z^{[3]}$ ni ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$z^{[3]} = \{z_1^3, \sqrt{3}z_1^2z_2, \sqrt{3}z_1z_2^2, z_2^3\}.$$

Bu klassik sohalar to'la doiraviy sohalar bo'lgani uchun, bunday sohalarida to'la ortonormal sistema mavjudligi birinchi bo'lib, A.Kartan o'zining 1931

yildagi [3] ishida keltirgan. Demak, yuqoridagi $\{z^{[\alpha]}\}$ monomlar, $\Re$ sohada va uning $\wp$ ostovda ortonormal funksiyalar sistemasini tashkil qiladi, ya'ni $\alpha \neq \beta$ uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\int_{\Re} \overline{z^{[\alpha]}}' \cdot z^{[\beta]} \cdot dz_1 dz_2 \dots dz_n = 0,$$

$$\int_{\wp} \overline{\xi^{[\alpha]}}' \cdot \xi^{[\beta]} \cdot d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = 0$$

bo'ladi. Agar biz $\{\varphi_v^\alpha(z)\}$, bilan z_α (bu yerda $z_\alpha = z^{[\alpha]}\Gamma$, Γ ortogonal matritsa) vektorning komponentasini belgilab olsak. U holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. Ushbu $\left\{ \frac{\varphi_v^\alpha(z)}{\sqrt{\rho_v^\alpha}} \right\}$ funksiyalar sistemasi $\Re$ sohada ortonormal sistema tashkil qiladi, ya'ni quyidagi

$$\int_{\Re} \varphi_v^\alpha(z) \overline{\varphi_\mu^\beta(z)} dz_1 dz_2 \dots dz_n = \delta_{v\mu} \delta_{\alpha\beta} \rho_v^\alpha,$$

$$\int_{\wp} \varphi_v^\alpha(\xi) \overline{\varphi_\mu^\beta(\xi)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n = \delta_{v\mu} \delta_{\alpha\beta},$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi, bu yerda $\delta_{\alpha\beta}$ – Kroneker simovoli bo'lib, quyidagicha topiladi

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ 1, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

ADABYOTLAR

[1] Cartan E. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes. // *Abh. Math. Sern. Univ. Hamburg* 11(1935), pp.116-162.

[2] Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

[3] H. Cartan. Sur les fonctions de deux variables complexes et probleme de la representation analytique, *J. Math, pures et appl*, ser. 9, 10 (1931), pp. 1-114.

IKKINCHI TUR MATRITSAVIY POLIKRUGDA GOLOMORF FUNKSIYALAR UCHUN KARLEMAN FORMULASI

¹Bozorov J.T., ¹Ko`charova M.N., <sup>2</sup>To`rayev T.A.

¹Termiz davlat universiteti, Termiz, O`zbekiston

²O`zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O`zbekiston

e-mail: jorabek.bozorov.89@mail.ru, safarjurrqulovich@gmail.com

Bizga $D_2 = \{Z_2 \in \mathbb{C}[m \times m] : Z_2 \overline{Z_2} < I, Z_2^T = Z_2\}$ ikkinchi tur klassik soha $([1,2])$ (bu yerda Z_2 $m \times m$ – tartibli simmetrik matritsa, $\overline{Z_2}$ – matritsa Z_2

matritsaning qo'shmasi, Z_2^T matritsa Z_2 matritsaning qo'shmasi, I – birlik matritsa) va $S_2 = \{\xi_2 \in \mathbb{C}[m \times m] : \xi_2 \bar{\xi}_2 = I, \xi_2^T = \xi_2\}$ D_2 sohaning ostovi ([1,2]) berilgan bo'lsin. Biz D_2 sohalarning n tasining dekart ko'paytmasi $\underbrace{D_2 \times D_2 \times \dots \times D_2}_{n\text{ta}}$ ni ikkinchi tur matritsaviy polikrug deb ataymiz va T_2^n bilan belgilaymiz ya'ni

$$T_2^n = \left\{ Z = (Z_2^1, Z_2^2, \dots, Z_2^n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : Z_2^j \bar{Z}_2^j < I, Z_2^j \in D_2 \right\}.$$

Ikkinchi tur matritsaviy polikrugning ostovi ham mos ravishda S_2 larning n tasining dekart ko'paytmasi ko'rinishida bo'ladi va $S(T_2^n)$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$S(T_2^n) = \left\{ \xi = (\xi_2^1, \xi_2^2, \dots, \xi_2^n) \in \mathbb{C}^n[m \times m] : \xi_2^j \bar{\xi}_2^j = I, \xi_2^j \in S_2 \right\}.$$

Bizga T_2^n sohada aniqlangan $f(Z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif ([2]): Agar $f(Z)$ funksiya T_2^n sohada golomorf bo'lib, quyidagi shartni qanoatlantirsa $\sup_{0 \leq r < 1} \int_{S(T_2^n)} |f(r\xi)| d\mu(\xi) < \infty$, bu yerda $d\mu(\xi) - S(T_2^n)$ dagi

normallangan Lebeg o'lchovi, u holda $f(Z)$ funksiya T_2^n sohada Xardi sinfiga tegishli deyiladi va $f(Z) \in H^1(T_2^n)$ orqali belgilanadi.

Endi ikkinchi tur matritsaviy polikrug avtomorfizmi $\phi_A(Z) = (\phi_A^1(z^1), \phi_A^2(z^2), \dots, \phi_A^n(z^n))$ ni qaraymiz, bunda har bir $\phi_A^j(z^j) = R^j(z^j - A^j)(I - \bar{A}^j z^j)^{-1}(\bar{R}^j)^{-1}$ ikkinchi tur klassik soha avtomorfizmi ([1,2]) bo'lib, undagi R^j, A^j, z^j matritsalar quyidagi shartlarni bajaradi [1] $\bar{R}^j(I - \bar{A}^j(A^j)^T)(R^j)^T = I, A^j \bar{R}^j + R^j A^j = 0$. Bu avtomorfizm $A \in T_2^n$ nuqtani nol nuqtaga 0 nuqtani A nuqtaga o'tkazadigan avtomorfizm.

Bizga $E \subset S(T_2^n)$ musbat o'lchovli ($\mu E > 0$) to'plam berilgan bo'lsin. E to'plamning $\mathbb{C}^{n-1}[m \times m]$ fazoga proyeksiyasini $S(T_2^{n-1})$ bilan belgilaymiz. Bu $S(T_2^{n-1})$ to'plam nuqtalarini $\xi = (\xi^2, \dots, \xi^n)$ orqali belgilaymiz.

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz

$$E_{0,\xi} = \left\{ Z : z \in E, \phi_0^1(z^1) = \lambda, \phi_0^j(z^j) = \lambda \phi_0^j(\xi^j), j = 2, n, \lambda \in S_2 \right\},$$

$$E_0 = \left\{ Z \in E, \mu_1 E_{0,\xi} > 0 \right\}.$$

Fubini teoremasiga ko'ra $\mu_{n-1} E > 0$ va $E_{0,\xi} \times E_0 = E$ bo'ladi.

Quyidagicha yordamchi funksiya olamiz

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_{0,\xi^1}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \quad \varphi_0 = \exp \psi_0$$

bunda $E_{0,\xi^1}^1 = \{\xi^1 \in E_{0,\xi}, \xi^1 = \alpha U, \alpha = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, E_{0,ξ^1}^1 to'plamning $E_{0,\xi}$ ga to'ldiruvchi to'plamini $\widetilde{E_{0,\xi}}$ bilan belgilaymiz ya'ni $E_{0,\xi^1}^1 \times \widetilde{E_{0,\xi}} = E_{0,\xi}$ tenglik o'rinli.

Lemma. Agar $f(z) \in H^1(T_2^n)$, $E \subset S(T_2^n)$, $\mu E > 0$ bo'lsa u holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$f(0) = \frac{m}{\int_{E_0} d\mu_{n-1} \int_{\widetilde{E_{0,\xi}}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(\xi) \left[\frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu(\xi)$$

Yuqoridagi Lemma ko'rsatadiki $f(Z)$ funksiyaning E to'plamdagi qiymati orqali T_2^n sohaning nol nuqtasida $f(Z)$ ning qiymati golomorf tiklandi. Endi bu lemma yordamida $f(Z)$ funksiyaning qiymatlarini T_2^n sohaning ixtiyoriy nuqtasida tiklaymiz. Buning uchun quyidagicha belgilashlarni amalga oshiramiz;

$$E_{A,\xi} = \{Z : Z \in E, \phi_A^1(z^1) = \lambda, \phi_A^j(z^j) = \lambda \phi_A^j(\xi^j), j = \overline{2, n}, \lambda \in S_2\},$$

$$E_A = \{\xi : \xi \in S(T_{n-1}), \mu_1 E_{A,\xi} > 0\}$$

bunda $E_{A,\xi} \times E_A = E$,

$$\varphi_A = \exp \psi_A, \quad \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_{A,w^1}^1} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \cdot \frac{d\eta}{\eta},$$

$$E_{A^1,w^1}^1 = \{\xi^1 \in E_{A,\xi} : \xi^1 = (\phi_A^1)^{-1} \left(\lambda (\phi_A^1)^{-1}(w) \right), |\lambda| = 1\}, \quad w \in \phi_A^1(SU(m)).$$

Teorema. Agar $f(z) \in H^1(T_2^n)$, $E \subset S(T_2^n)$, $\mu E > 0$ bo'lsa, u holda $\forall A \in T_2^n$ nuqta uchun quyidagi formula o'rinli bo'ladi

$$f(A) = \frac{m}{\int_{E_A} d\mu_{n-1} \int_{\widetilde{E_{A,\xi}}} d\mu_0} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_E f(\xi) \left[\frac{\varphi_A(\xi)}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H(A^j; \xi^j) d\mu(\xi),$$

bunda $H(A^j; \xi^j) = \frac{1}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I - A^j \bar{\xi}^j)}$ - ikkinchi tur klassik soha uchun Koshi-Sege

yadrosi. Bunday masalaning yechimi birinchi tur matritsaviy polikrugda B.A.Shoimqulov, J.T.Bozorov ([3]) tomonidan Karleman formulasi olingan

Adabiyotlar.

[1] Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. —М., Изд. иност. лит., 1959. —163 с.

[2] Худайбергенов Г., Кытманов А.М., Шаймкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Монография. Красноярск, Ташкент. 2017. –293 с.

[3] Shaimkulov B. A., Bozorov J.T. Carleman's Formula for a Matrix Polydisk//Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. –2015. No8(2). –P.371-374.

ON SOME CHAOTIC MAPS

¹*Dzhalilov A., ²Esanboeva M.*

¹*Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan*

²*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan.*

e -mail: esanboyevamarziya@gmail.com, adzhalilov21@gmail.com

In present work we study dynamical system given by a measure-preserving map $\hat{T}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ where $\hat{M}$ is a Borel probability space, λ is invariant measure. Let B be the Borel σ -algebra on $\hat{M}$ with respect to λ . Here we define some notions related to the recurrence properties of the dynamical system. Let $\hat{T}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ be a dynamical system, with invariant the measure λ . Let B be the Borel σ -algebra.

Definition 1 (see [1]). The Poincare recurrence time of a subset $A \in B$ of a positive measure is a positive integer $\tau(A) \leq +\infty$ given by

$$(1) \quad \tau_{\hat{T}}(A) = \inf_{n \geq 1} \{n: \lambda(\hat{T}^n(A) \cap A) > 0\}.$$

We drop the subscript and use $\tau(A)$ instead. If the Poincare recurrence time is finite, then it is the smallest integer n such that the n th iterate of A under $\hat{T}$ intersects A nontrivially. Next, we list a few properties of Poincare recurrence time. These statements follow easily from the definition.

Lemma 1 (see [1]). Let A and B be two measurable sets. Then if $A \subset B$ then

$\tau(A) \geq \tau(B)$, $\tau(A) = \tau(\hat{T}^{-1}(A))$, where $\hat{T}^{-1}(A)$ is a complete preimage of subset A .

For $n \geq 0$ and $A \in B$, define the following sets:

$$\Omega_n(A) = \{x \in \hat{M} : \exists j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n, \hat{T}^j x \in A\} = \bigcup_{i=0}^n \hat{T}^{-i}(A),$$

$$\theta_n(A) = \{x \in \hat{M} : \hat{T}^n x \in A, \hat{T}^j x \notin A, j = 0, \dots, n-1\}.$$

The set $\Omega_n(A)$ consists of all points which orbits enter A after no more than n iterates. The set $\theta_n(A)$ consists of all points which orbits enter A at first time exactly on n th iterate. Note that $\Omega_0(A) = A$ and $A \subset \Omega_n(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. It is easy to see that these sets have the following properties.

Lemma 2 (see [1]). Let A be a measurable set. Then

- $\Omega_i(A)$ is a no decreasing sequence of sets;
- $\theta_i(A) \cap \theta_j(A) = \emptyset$, if $i \neq j$, $i, j > 0$;
- $\theta_n(A) = \bigcup_{i=0}^n \theta_i(A)$.

Open dynamical systems. Let A be a measurable set and let $M = \widehat{M} \setminus A$. We define an open dynamical system (system with a "hole" A) as a map $T: M \rightarrow \widehat{M}$, where $T: M = \widehat{T}|_M$ is a restriction of $\widehat{T}$ to M . We keep track of the orbits while they stay outside the "hole" A , and after they enter a hole we no longer consider these orbits.

Definition 2. The escape rate into the hole A is a nonnegative number:

$$(2) \quad \rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda \left(\widehat{M} \setminus \Omega_n(A) \right),$$

if this limit exists. The number $\lambda \left(\widehat{M} \setminus \Omega_n(A) \right) = 1 - \lambda(\Omega_n(A))$ is called a survival probability. Hence, the escape rate represents the average rate at which orbits enter the hole. We will only consider systems in which almost every orbit eventually enters the hole, i.e. systems which satisfy the following condition

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda(\theta_i(A)) = 1$$

Lemma 3 (see [1]). Suppose that condition H1 holds and the escape rate, $\rho(A)$, exists. Then

$$\rho(A) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lambda(\theta_n(A))$$

Consider first $\widehat{T}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ given by $\widehat{T}x = 10x \bmod 1$. This map preserves the Lebesgue measure on $[0, 1]$. Fix $N \in \mathbb{N}$ and let $I_N = \{I_{i,N}\}_{i=1}^{10^N}$ be the partition consisting of the pre-images of the elements of Markov partition $\{[0, 0.1], [0.1, 0.2], [0.2, 0.3], \dots [0.9, 1]\}$ of $[0, 1]$ given by

$$I_{i,N} = \left[\frac{i-1}{10^N}, \frac{i}{10^N} \right], \quad i = 1 \dots 10^N$$

Define a partition $I_N^k = \{I_{j,N+k}\}_{j=1}^{10^{N+k}}$ as k^{th} preimage of the partition I_N , i.e. for each $j, j = 1 \dots 10^{N+k}$, there is $i, i = 1 \dots 10^N$, such that $\widehat{T}^k I_{j,N+k} = I_{i,N}$. Observe that I_N^k are Markov partitions themselves.

Consider now an open dynamical system defined by the map $\widehat{T}$ and the hole $I_{i,N}$,

$$T_{i,N} : [0, 1] \setminus I_{i,N} \rightarrow [0, 1]$$

For each $i, i = 1 \dots 10^N$, we have different open dynamical system with a corresponding hole $I_{i,N}$ (we refer to this hole as to a Markov hole because $I_{i,N}$ is an element of Markov partition). Define the Poincare recurrence time of the hole, $\tau(I_{i,N})$, escape rate into the hole, $\rho(I_{i,N})$, and the set

$$\Omega_n(I_{i,N}) = \{x \in [0, 1]: \exists j, 0 \leq j \leq n, \widehat{T}^j x \in I_{i,N}\}, \quad n \geq 0.$$

We formulate our main result.

Theorem 1. Let $I_{i,N}$ and $I_{j,N}$ be two Markov holes for the doubling map. Suppose that $\tau(I_{j,N}) > \tau(I_{i,N})$. Then $\rho(I_{j,N}) > \rho(I_{i,N})$. Moreover, for all $n \geq \tau(I_{j,N})$,

$$1 - \lambda(\Omega_n(I_{j,N})) < 1 - \lambda(\Omega_n(I_{i,N})).$$

References

[1] V. Afraimovich and L. Bunimovich: Which hole is leaking the most: A topological approach to study open systems (2010) [Nonlinearity](#) 23(3), 643

ON SOME SYMBOLIC DYNAMICAL SYSTEMS ASSOCIATED BY CIRCLE DYNAMICS

¹*Dzhalilov A.A., ²Kakhkhorov. M.J.*

¹*Turin Polytechnic University in Tashkent,*

²*Institute of Mathematics named V.I. Romanovsky,*

e-mail: muhriddin_0191@mail.ru

Let $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{z_b\})$, $\varepsilon > 0$ be an orientation preserving circle homeomorphism with single break point z_b (see [2]). Suppose the rotation number is “Golden mean” $\rho_* := \rho T = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (see [1]). Then ρ_* can be uniquely expanded as a continued fraction i.e. $\rho_* = 1/(1+1/(1+1/\dots)) := [1, 1, \dots, 1, \dots]$. Denote by $p_n / q_n = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, $n \geq 1$, its n -th convergent. The numbers q_n , $n \geq 1$ are called **the first return times** of T and satisfy the recurrence relations $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$, $n \geq 1$, where $q_0 = 1$ and $q_1 = k_1$. Put $z_0 = z_b$. Its forward orbit $O_T^+(z_0) = \{z_i = T^i(z_0), i = 0, 1, 2, \dots\}$ defines a sequence of natural partitions of the circle. Indeed, denote by $I_0^{(n)}(z_0)$ the closed interval in S^1 with endpoints z_0 and $z_{q_n} = T^{q_n}(z_0)$. In the clockwise orientation of the circle the point z_{q_n} is then for n odd to the left of z_0 , and for n even to its right. If $I_i^{(n)}(z_0) = T^i(I_0^{(n)}(z_0))$, $i \geq 1$, denote the iterates of the interval $I_0^{(n)}(z_0)$ under T , it is well known, that the set $P_n(z_0)$ of intervals with mutually disjoint interiors, defined as [1]

$$P_n(z_0) = \left\{ I_0^{(n)}(z_0), 0 \leq i < q_{n+1} \right\} \cup \left\{ I_j^{(n+1)}(z_0), 0 \leq j < q_n \right\}$$

determines a partition of the circle for any n . The partition $P_n(z_0)$ is called the n -th dynamical partition of S^1 determined by the point z_0 and the map T .

Proceeding from partition $P_n(z_0)$ to $P_{n+1}(z_0)$ all the intervals $I_j^{(n+1)}(z_0)$, $0 \leq j < q_n - 1$ are preserved, whereas each of the intervals $I_i^{(n)}(z_0)$, $0 \leq i < q_{n+1} - 1$, is partitioned into $k_{n+2} + 1$ subintervals belonging to $P_{n+1}(z_0)$, such that

$$I_i^{(n)}(z_0) = I_i^{(n+2)}(z_0) \cup \bigcup_{s=0}^{k_{n+2}-1} I_{i+q_n+sq_{n+1}}^{(n+1)}(z_0)$$

Obviously one has $P_1(z_0) \prec P_2(z_0) \prec \dots \prec P_n(z_0) \prec \dots$

The intervals $I_0^{(n)}(z_0)$, $I_0^{(n+1)}(z_0)$ are called **generators** of the partition $P_n(z_0)$.

The sequence of dynamical partitions $P_n(x_b), n \geq 1$, allows us to introduce a symbolic dynamics for the map T . For this take the break point $x_b \in S^1 \setminus O_T^+(x_b)$ where $O_T^+(x_b)$ denotes the forward orbit of the break point x_b of T . For $n \geq 0$ put $a_{n+1} =: a_{n+1}(x) = a$ if $x \in I_j^{(n+1)}(x_b), 0 \leq j < q_{n+1}$. If however $x \in I_j^{(n)}(x_b), 0 \leq j < q_{n+1}$ we know from the construction of the partition P_{n+1} from P_n in case "Golden mean" rotation number $\rho_* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ that either $x \in I_j^{(n+2)}(x_b), 0 \leq j < q_{n+1}$ or $x \in I_{i+q_n}^{(n+1)}(x_b), 0 \leq i < q_{n+1}$. In the first case we put $a_{n+1} = 0$ and in the second $a_{n+1} = 1$. This way we get a one-to-one correspondence

$$\varphi: S^1 \setminus O_T^+(x_b) \leftrightarrow \{(a_1, \dots, a_n \dots), a_n \in \{-1, 0, 1\}; a_{n+1} = -1 \Leftrightarrow a_n = 0, n \geq 1\} := \Theta_A,$$

where Θ_A denotes the space of allowed infinite one-sided sequences of symbols from the alphabet $A = \{-1, 0, 1\}$ with transition matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

that is

$$\Theta_A := \{\underline{a} = (a_1, \dots, a_n \dots), a_i \in A, A_{a_i, a_{i+1}} = 1 \text{ for } i \in \mathbb{Z}_+\}.$$

The triple (Θ_A, A, σ) with $(\sigma: \Theta_A \rightarrow \Theta_A)$ the shift map $(\sigma(a))_i = a_{i+1}$ is called a subshift of finite type over the alphabet A with transition matrix A . Notice that every interval $I^{(n)}$ of the dynamical partition P_n corresponds to the unique finite word $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ of length n . In particular, for n even the words $(-1, 0, -1, 0, \dots, -1, 0)$ and $(0, -1, 0, -1, \dots, 0, -1)$ correspond to the atoms $I_0^{(n+1)}(x_b)$ respectively $I_0^{(n)}(x_b)$ of P_n .

Denote by $A^t = (A_{i,j}^t), i, j \in A$ the transposed matrix of A and by (Θ_A, A, σ) the subshift of finite type with alphabet A and transition matrix A^t . Obviously $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots) \in \Theta_{A^t}$ if and only if $b_{n+1} = 0$ if $b_n = -1$. Therefore a finite sequence $(a_1, \dots, a_n \dots)$ is a subsequence of some $\underline{a} \in \Theta_A$ iff $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ is a subsequence of some $\underline{b} \in \Theta_{A^t}$. Since $A_{i,j}^3 = (A^t)_{i,j}^3 > 0$ for all $i, j \in A$, the map σ is topological mixing in both Θ_A and Θ_{A^t} . In the following we denote by $\vec{a}$ the vector $(a_1, \dots, a_n \dots) \in A^n : A_{a_i, a_{i+1}} = 1, 1 \leq i \leq n-1$, and by $\vec{b}(b_1, \dots, b_n \dots) : A_{a_i, a_{i+1}}^t = 1, 1 \leq i \leq n-1$,

Since the rotation number ρ_* is irrational homeomorphism T is strictly ergodic i.e. T has a unique T -invariant probability measure μ . We denote the Lebesgue measure on S^1 by λ . Using the measures μ and λ we get the measures $\hat{\mu}$ and $\hat{\lambda}$ on symbolic space Θ_A , respectively. Notice both measures $\hat{\mu}$ and $\hat{\lambda}$ are not σ -invariant. But it is possible to build σ -invariant probability measures μ_θ and λ_θ . Next we formulate our main result.

- Theorem 1.** a) The matrix A corresponding to is irreducible;
b) The periodic orbits of dynamical system are dense on symbolic space;
c) The number of periodic points of period n tends to infinity.

References

- [1] W.M. de Melo, S. van Strien, One dimensional dynamics, Springer Verlag, Berlin, 1993. -p. 605.
[2] Dzhallilov A.A., Lioussé I., Mayer D. Singular measures of piecewise smooth circle homeomorphisms with two break points. // Discrete and Continuous Dynamical Systems, -2009. -V24. N4.- p.381-403.

RANDOM PERTURBATIONS OF PIECEWISE-LINEAR CIRCLE MAPS

¹Dzhallilov.A.A., ²Abdusalomov.H.Sh.

¹Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: hasanboy155abs@gmail.com

In present work we study the iterative random sequences, such random sequences were investigated by many authors (see for instance [1]).

Let $a, b \in (0,1)$. Consider the map $h: [0,1) \rightarrow [0,1)$ given by (see [2])

$$h(x) = \begin{cases} a + \frac{1-a}{b}x, & \text{for } 0 \leq x < b, \\ \frac{a}{1-b}(x-b), & \text{for } b \leq x < 1. \end{cases}$$

The map has two break points $x=0$ and $x=b$. Let A^* denote the class of all such maps. Recall that x_0 is called a break point of a map f if

$$\frac{f'_-(x_0)}{f'_+(x_0)} = \sigma_f(x_0) \neq 1 \text{ and } f'_\pm(x_0) > 0.$$

Notice the derivative Dh is $\alpha = \frac{1-a}{b}$ on $[0,b)$ and $\beta = \frac{a}{1-b}$ on $[b,1)$.

Coelho and et al. in [2] found formula for the rotation number of maps from A^* in terms of its parameters.

Theorem 1 (see [2]). Let $h \in A^*$ have parameters (a, b) and derivatives α, β on $[0, b), [b, 1)$ respectively. Then the rotation number ρ of h is given by

$$\rho = \log \frac{1}{\alpha} : \log \frac{\beta}{\alpha} = \log \frac{b}{1-a} : \log \frac{ab}{(1-b)(1-a)}$$

We suppose that the rotation number of h is irrational number. It is well known that in this case h has unique probability invariant measure. Moreover the orbit of any point is dense on $[0, 1)$.

Now we state some conventions we will apply throughout this work. Here and later on h^n denotes n -th iteration of h . Since the values of $a = h(0)$ and $b = h^{-1}(0)$ uniquely define the map h , the set A^* can be parameterized by the open square $(0, 1) \times (0, 1)$ and we will often refer to h by the pair of parameters (a, b) . The parameter b is referred to as the critical point of h . Notice that both break points $x = 0$ and $x = b$ lie on the same orbit. It is easy to check that for all $n \geq 2$ the map is piecewise linear function with two break points: $x_1 = 0$ and $x_2 = h^{1-n}(0)$. Denote $a_n = h^n(0)$, $n \geq 0$. Using the definition h we can find the map h^n :

$$h^n(x) = \begin{cases} a_n + \frac{1-a_n}{h^{1-n}(0)}x, & \text{for } 0 \leq x < h^{1-n}(0), \\ \frac{a_n}{1-h^{1-n}(0)}(x - h^{1-n}(0)) + h^{1-n}(0), & \text{for } h^{1-n}(0) \leq x < 1. \end{cases}$$

The lift function of h^n is $H^n: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$H^n(x) = \begin{cases} a_n + k + \frac{1-a_n}{h^{1-n}(0)}(x - k), & \text{for } k \leq x < k + h^{1-n}(0), k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{a_n}{1-h^{1-n}(0)}(x - h^{1-n}(0) - k) + k + 1, & \text{for } k + h^{1-n}(0) \leq x < k + 1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Let (Ω, F, P) be a probability space. ξ_0 is random variable with Gaussian distribution $N(0, 1)$ i.e. its density $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Next we define the following sequence of random variables: $\eta_n = h^n(\xi_0)$, $n \geq 1$.

We introduce the following notations:

$$M_n^{(1)} = \frac{1 - a_n - h^{1-n}(0)}{\sqrt{2\pi} h^{1-n}(0) (1 - h^{1-n}(0))} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+h^{1-n}(0)} (x + k) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$M_n^{(2)} = \frac{a_n + h^{1-n}(0) - 1}{\sqrt{2\pi} (1 - h^{1-n}(0))} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+h^{1-n}(0)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Now we formulate the main result of our work.

Theorem 2. a) The sequence of random variables $\{\eta_n = h^n(\xi_0), n \geq 1\}$ is a Markov chain.

b) The mean of η_n , $n \geq 1$, can be written in the following form:

$$E\eta_n = \frac{2a_n h^{1-n}(0) + 1 - h^{1-n}(0)}{2h^{1-n}(0)} + M_n^{(1)} + M_n^{(2)}$$

The last theorem shows that the mean of random variables η_n determined by orbit of break point $x = 0$.

References

[1] Hernandez-Lerma O, Laserre J. B. Markov Chains and Invariant Probabilities.: Springer Basel AG, 2003.-207 p.

[2] Coelho Z, Lopes A, da Roca L.F., Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps// Proceedings of American Mathematical Society.-1995.-№.11- P.1-5.

GROUND STATES FOR THE MIXED SPIN ISING MODEL ON A CAYLEY TREE

¹Egamov D.O., ²Odiljonova H.A.

¹V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

²Namangan state university, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: dilshodbekegamov87@gmail.com

This paper gives ground states for the *mixed spin Ising model* on the Cayley tree of order two. The Cayley tree Γ^k (see [2]) of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k + 1$ edges issue. Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k , L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices* and we write $l = \langle x, y \rangle$. By a *path* from the point x to the point y we mean a collection of pairs $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$. The shortest path from x to y is called the distance $d(x, y)$ between them.

For the fixed $x^0 \in V$, we set

$$W_n = \{x \in V : d(x, y) = n\}, V_n = \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\},$$

$$L_n = \{\langle x, y \rangle \in L : x, y \in V_n\},$$

and we denote $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$. The set of *direct successors* of x is defined by

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, x \in W_n.$$

Observe that any vertex $x \neq x^0$ has k direct successors and x^0 has $k + 1$.

Denote $\Gamma_+^k = \{x \in V : d(x^0, x) - \text{even}\}$, $\Gamma_-^k = \{x \in V : d(x^0, x) - \text{odd}\}$.

To define the model properly, let us introduce spin state spaces as $\Phi = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ and $\Psi = \{-1, 1\}$. Then corresponding configuration spaces are defined by $\Omega_+ = \Phi^{\Gamma_+^k}$ and $\Omega_- = \Psi^{\Gamma_-^k}$. Moreover, one defines $\Omega_{+,n} = \Phi^{\Gamma_+^k \cap V_n}$ and $\Omega_{-,n} = \Psi^{\Gamma_-^k \cap V_n}$. The model is defined on the following configuration space $\Xi = \Omega_+ \times \Omega_-$. In what follows, for a configuration $\xi \in \Xi$, we write (see [1])

$$\xi_x = \begin{cases} \sigma(x) & \text{if } x \in \Gamma_+^k \\ s(x) & \text{if } x \in \Gamma_-^k \end{cases} \quad (1)$$

where $\sigma \in \Phi = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ and $s \in \Psi = \{-1, 1\}$.

Consider the quotient group $G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$, where G_k^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$. A configuration σ_x is called to be G_k^* -periodic if $\sigma_x = \sigma_i$ for all $x \in H_i$. Then the corresponding Hamiltonian reads as follows:

$$H(\xi) = -J \sum_{\langle x, y \rangle} \xi(x) \xi(y), \quad \xi \in \Xi, \quad (2)$$

where $J \in \mathbb{R}$. Then

$$U(\xi_b) = U(\xi_b, J) = -\frac{1}{2} J \sum_{\langle x, y \rangle, x, y \in b} \xi(x) \xi(y), \quad (3)$$

Denote $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : d(x, x^0) - \text{even}\}$, $G_k \setminus G_k^{(2)} = \{x \in G_k : d(x^0, x) - \text{odd}\}$, then by (1), (3) one gets

$$U(\xi_b) = \begin{cases} -\frac{1}{2} J \sum_{y \in S_1(c_b)} \sigma(c_b) s(y) & \text{if } c_b \in G_k^{(2)}, \\ -\frac{1}{2} J \sum_{y \in S_1(c_b)} s(c_b) \sigma(y) & \text{if } c_b \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

where $\sigma(x) \in \Phi$, $s(x) \in \Psi$.

For the sake of simplicity of, in what follows, we always assume the order of the tree is two, i.e., $k = 2$. The case $k \geq 3$ can be proceeded by a similar argument. Then, one easily finds that $U(\xi_b) \in \{U_1, \dots, U_{13}\}$ for every ξ_b where

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{3}{2}J, \quad U_2 = -J, \quad U_3 = -\frac{1}{2}J, \quad U_4 = \frac{1}{2}J, \quad U_5 = J, \quad U_6 = \frac{3}{2}J, \\ U_7 &= -2J, \quad U_8 = -\frac{5}{2}J, \\ U_9 &= 2J, \quad U_{10} = \frac{5}{2}J, \quad U_{11} = -3J, \quad U_{12} = 3J, \quad U_{13} = 0. \end{aligned}$$

A configuration ξ is a *ground state* if $U(\xi_b) = \min\{U_1, \dots, U_{13}\}$ for any $b \in M$.

For each $i \in \{1, \dots, 13\}$, we put

$$A_i = \{J \in \mathbb{R} : U_i = \min\{U_1, \dots, U_{13}\}\} \quad (4)$$

and

$$C_i = \{\xi_b : U(\xi_b) = U_i\} \quad (5)$$

It is easy to that $A_{11} = \{J : J > 0\}$, $A_{12} = \{J : J < 0\}$,

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = A_{13} = \{0\}.$$

Theorem. 1.1. *Let $J \in A_{11}$. For the mixed spins Ising model the configurations $\xi_1 \equiv (-1, 2)$, $\xi_2 \equiv (1, -2)$ are $G_2^{(2)}$ -periodic ground states.*

1.2. Let $J \in A_{12}$. For the mixed spins Ising model the configurations $\xi_1 \equiv (-1, -2)$, $\xi_2 \equiv (1, 2)$ are $G_2^{(2)}$ -periodic ground states.

Reference

[1] H. Akin, F. M. Mukhamedov, Phase transition for the Ising model with mixed spins on a Cayley tree, *J. Stat. Mech.* (2022).

[2] U. A. Rozikov: *Gibbs measures on a Cayley tree*, World Scientific Publishing, Singapore 2013

CONVERGENCE OF ASYMPTOTIC DISTRIBUTIONS OF HITTING TIMES FOR CRITICAL CIRCLE MAPS

Jalilov A.

Amity University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: ajalilov@amity.uz

We study the asymptotic behavior of critical circle maps with a single critical point having an odd type. These maps have been studied intensively in the early 1980's by many authors. One of the most famous example is Arnold's map

$$f(x) = x + t + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \bmod 1, \quad x \in S^1$$

for every $t \in [0, 1)$ the map f is a critical map with critical point 0 of cubic type.

We define a set of real-analytic commuting pairs that corresponds to a set of real-analytic critical circle homeomorphisms the order of three. Denote by X_{cr} the set of pairs (ξ, η) of real-analytic, strictly increasing on real line with golden mean rotation number $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Next we define the renormalization group transformation $R: X_{cr} \rightarrow X_{cr}$:

$$R(\xi, \eta) = (\alpha\eta(\alpha^{-1}x), \alpha\eta(\xi(\alpha^{-1}x)))$$

where $\alpha = [\eta(0) - \eta(\xi(0))]^{-1}$. The renormalization group transformation R has a single hyperbolic stable point (ξ_0, η_0) in the subspace $X_{cr}(\rho)$ (see [4]).

We denote by $Cr(\rho)$ the set of all circle homeomorphisms defined on the unit circle S^1 whose are C^1 -conjugated to f_{cr} . Any two topological conjugated

homeomorphisms have the same rotation number, which implies that, the rotation numbers of homeomorphisms of $Cr(\rho)$ are the same and equal to ρ .

Let (X, B, μ) be a probability measure space and $T: X \rightarrow X$ be μ -invariant transformation. Fix a point $x \in X$ and consider the measurable subset $A \subset X$, such that $\mu(A) > 0$. Define the **first hitting time** $N_A^{(1)}: X \rightarrow \mathbb{N}$

$$N_A^{(1)}(x) = \inf\{i \geq 1: f^i(x) \in A\}$$

and we set $N_A^{(1)}(x) = \infty$, if $f^i(x) \notin A$ for all $i \in \mathbb{N}$. The restriction of $N_A^{(1)}(x)$ to the set A is called the **first return time** of A . The fundamental theorem of Poincare (see [1]) states that μ -almost all points $x \in A$ return infinitely many times to the set A .

The problem consists of finding conditions under which the hitting time, after rescaling by some suitable constant depending on A , converges in law, when $\mu(A)$ tends to zero. Since the expectation of the first hitting time is of the order $1/\mu(A)$, it is natural to rescale the hitting time by this factor.

In present work, we study the behavior of rescaled hitting times for the critical circle maps. Let f be an orientation preserving homeomorphism of the circle S^1 with irrational rotation number ρ . Let μ be the unique invariant probability measure of f . Fix a point $z \in S^1$ and consider the interval $J_\varepsilon(z) = [z, z + \varepsilon] \subset S^1$. Consider the first hitting $N_\varepsilon(x) = \inf\{i \geq 1: f^i(x) \in J_\varepsilon(z)\}$.

Next, define rescaled hitting time $E_\varepsilon(x) = \mu(J_\varepsilon(z))N_\varepsilon(x)$ to the interval $J_\varepsilon(z)$. We are interested in the converges of the distribution function of the

$$F_\varepsilon(t) = \ell(x \in S^1: E_\varepsilon(x) \leq t), t \in \mathbb{R},$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, for every t belonging to the continuity points of the limit function.

De Faria and Coelho in [2] studied $F_n(t)$, when c_n is chosen such that $[x_c, c_n]$ corresponds to a sequence of renormalization intervals for f . They proved that for Lebesgue almost every rotation number ρ , the rescaled hitting times $E^{(1)}(x) := \mu([x_c, c_n])N_n(x)$ do not converge in law as c_n tends to zero, and all possible limit laws under a subsequence of c_n are obtained. Sh.Ayupov and A. Jalilov in [3] studied $F_n(t)$ for the intervals

$$\mu([x_0, c_n(\theta)]) = \theta \cdot \mu([x_0, f_{q_n}]).$$

Define the sequence $r_n \in \mathbb{N}$, such that $r_i = \min\{n: x_{q_{i+1}} < x_n < x_{q_i}\}$.

We denote by $I_{r_n} = (x_0, x_{r_n})$. Consider the hitting times $N_{r_n}(x)$ to the interval $I_n = (x_0, x_{r_n})$ and rescaled hitting times $E_{r_n}(x) = \mu([x_c, x_{r_n}])N_{r_n}(x)$.

Consider the distribution function of the

$$F_{r_n}(t) = \ell(x \in S^1: E_{r_n}(x) \leq t), t \in \mathbb{R}.$$

Theorem. *Let $\rho \in (0,1)$ and let f be critical circle map. Consider for $\theta \in (0,1)$ the sequence of distribution functions $F_{r_n}(t)$ with respect to Lebesgue measure on circle corresponding to the first rescaled hitting times $E_{r_n}(x)$. Then there exists the finite limit of the sequence $\{F_{r_n}(t)\}$ which is strictly increasing on $[0,1]$ and continuous distribution function on $\mathbb{R}^1$ and the limit distribution is singular on $[0,1]$ with respect to Lebesgue measure.*

References.

- [1] W. De Melo , S. van Strien. One dimensional dynamics-Berlin, New York.: Springer,1993. p. 3-25.
- [2] Z. Coelho, E. de Faria. Limit laws of entrance times for homeomorphisms. *Israel J. Math.* 93 (1996), p. 93-112.
- [3] Ayupov Sh.A., Jalilov A.A. Asymptotic distribution of hitting times for critical maps of the circle // Вестник Удмуртского университета, -2021. Vol. 31. No. 3. p. 365-383.

GROUND STATES FOR BLUME-EMERY-GRIFFITHS MODEL ON A CAYLEY TREE

¹Jovliyev D.H., ²Rajabov M.T

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

²Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy, Denau, Uzbekistan;

e-mail: ¹dilmurodjovliyev9912@gmail.com, ²rajabovmt1991@yandex.ru

We construct some finitely periodic ground states for the Blume-Emery-Griffiths model on the Cayley tree of order three. In [1] was considered for the low temperature Blume–Emery–Griffiths Z_d , $d \geq 2$, lattice model taking site spin values 0, +1, -1 they constructed, using a polymer expansion, two pure states in the parameter region where there were an infinite number of configurations with minimal energy. Each state was invariant under translation by two lattice spacings and the two states were related by a unit translation. Using analyticity techniques, they showed that the truncated n -point function decays exponentially with an n -independent lower bound on the decay rate. For the truncated two-point function, authors found the exact exponential decay rate in the limit $\beta \rightarrow \infty$.

The Cayley tree (Bethe lattice) Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex (see[3]). We write $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l = \langle x, y \rangle$.

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group of the G_k of the free products of $k + 1$ cyclic groups of second order with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ (see[2],[3]).

We consider the model [2] in which the spin takes values in the set $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. A *configuration* y on the set V is then defined as a function $x \in V \rightarrow y(x) \in \Phi$ the set of all configurations coincides with $\Omega = \Phi^V$. The Hamiltonian of the BEG model [2] with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = \sum_{\langle i, j \rangle} (\sigma_i \sigma_j + y \sigma_i^2 \sigma_j^2 + x(\sigma_i^2 + \sigma_j^2))$$

where $\{i, j\}$ is an unordered pair of nearest in Z^d , $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ and $x, y \in \mathbb{R}^2$

Let M be the set of all unit balls with vertices in V . By the restricted configuration σ_b , we mean the restriction of a configuration σ to a ball $b \in M$. The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i \sigma_j + y \sigma_i^2 \sigma_j^2 + x(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)),$$

where $x, y \in \mathbb{R}^2$

We consider the case $k=4$. It is easy to see that $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, \dots, U_{26}\}$ for any σ_b , where

$$\begin{aligned} U_1(\sigma) &= \frac{1}{2}(5-5y-10x), & U_2(\sigma) &= \frac{1}{2}(-5-5y-10x), & U_3(\sigma) &= \frac{1}{2}(3-5y-10x), \\ U_4(\sigma) &= \frac{1}{2}(-3-5y-10x), & U_5(\sigma) &= \frac{1}{2}(1-5y-10x), & U_6(\sigma) &= \frac{1}{2}(-1-5y-10x), \\ U_7(\sigma) &= \frac{1}{2}(4-4y-9x), & U_8(\sigma) &= \frac{1}{2}(-4-4y-9x), & U_9(\sigma) &= \frac{1}{2}(2-4y-9x), \\ U_{10}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-2-4y-9x), & U_{11}(\sigma) &= \frac{1}{2}(3-3y-8x), & U_{12}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-3-3y-8x), \\ U_{13}(\sigma) &= \frac{1}{2}(1-3y-8x), & U_{14}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-1-3y-8x), & U_{15}(\sigma) &= \frac{1}{2}(2-2y-7x), \\ U_{16}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-2-2y-7x), & U_{17}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-2y-7x), & U_{18}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-4y-9x), \\ U_{19}(\sigma) &= \frac{1}{2}(-1-y-6x), & U_{20}(\sigma) &= \frac{1}{2}(1-y-6x), & U_{21}(\sigma) &= -\frac{5}{2}x, \\ U_{22}(\sigma) &= -2x, & U_{24}(\sigma) &= -x, & U_{26}(\sigma) &= 0. \\ U_{23}(\sigma) &= -\frac{3}{2}x, & U_{25}(\sigma) &= -\frac{1}{2}x, & & \end{aligned}$$

Definition. A configuration ϕ is said to be the ground state of the relative Hamiltonian H if

$$U(\phi_b) = \min\{U_1, U_2, \dots, U_{26}\}$$

for any $b \in M$.

We set $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ and $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$ if $\sigma_b \in C_i$, $i = 1, 2, \dots, 26$. For any $i = 1, 2, \dots, 26$, we set

$$A_i = J \in R^2 : U_i = \min\{U_1, U_2, \dots, U_{26}\}. \quad (1.2)$$

Rather cumbersome but straightforward calculations show that

$$A_1 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_9 = A_{11} = A_{12} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = A_{18} = A_{19} = \{x = 0, y = 0\}$$

$$A_2 = \{x \leq 0, y \geq -1 - 2x\} \cup \{x > 0, y \geq -1 - x\},$$

$$A_8 = A_{13} = A_{20} = \{x \geq 0, y = -1 - x\},$$

$$A_{21} = \{x \geq 0, y \leq -1 - x\},$$

$$A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{25} = \{x = 0, y \leq -1\},$$

$$A_{26} = \{x \leq 0, y \leq -1 - 2x\}.$$

and $\cup_n A_n = R^2$

Theorem. For any class $C_i, i = 1, 2, \dots, 26$, and any bounded configuration $\sigma_b \in C_i$, there exists a configuration ϕ (on the Cayley tree) such that $\phi_b^0 \in C_i$ for any $b^0 \in M$ and $\phi_b = \sigma_b$.

References

[1] Gastao A. Braga, Paulo C. Lima and Michael L. O'carroll, Low temperature properties of the Blume-Emery-Griffiths (BEG) model in the region

with an infinite number of ground state configurations //Reviews in Mathematical Physics Vol. 12, No. 06, pp. 779-806 (2000)

[2] Paulo C.: Uniqueness of the Gibbs state of the BEG model in the disordered region of parameters *Letters in Mathematical Physics*, (2021) 111:14.

[3] Rozikov, U.: Gibbs measures of Potts model on Cayley trees// World Scientific 2013, 384pp.

DYNAMICS OF LINEAR MAPS DEFINED ON A THREE-DIMENSIONAL SIMPLEX OF IDEMPOTENT MEASURES

Jurayev I. T.

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan

e-mail: jurayev.ilhomjon.85@gmail.com

Teorema1. [See 1]. A linear operator $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ maps I_n to itself, if and only it satisfies one of following conditions:

1) *A has at least one zero row ($\exists m \leq n$ such that all of elements of m -th row of the matrix A consists of only zeroes).*

2) *Each k -th row of the matrix A contains exactly one non-zero element: In each k -th row of the matrix A all of elements except a_{k,m_k} are zeroes. Where $m_q \neq m_r$ if $q \neq r$ ($q = \overline{1,n}, r = \overline{1,n}, k = \overline{1,n}$);*

Assume 2) condition of the theorem is satisfied. i.e. $a_{ij} \geq 0$ and A matrix has a not more than one non zero element in each row and in each column. We study trajectories of this case. In this case we have 6 operator which satisfies 2) conditions of the theorem:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} & \text{b) } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} & \text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} & \text{e) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} & \text{f) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Let's denote by $A_{(n;m_1,m_2,\dots,m_n)}$ operator A as [See 3 and 5]

$$A_{(n;m_1,m_2,\dots,m_n)} = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \quad (2)$$

where n – order of the matrix and m_k – is the number mentioned in Theorem 1 which corresponding to the k – th row of the matrix A , $m_k \leq n$, $m_k \neq m_q$, $k \neq q$.

In (2) we can see that there are $n!$ cases possible. It will be too difficult to analysis all of these cases. That's why according to the form (2) we can make the set A as:

$$\Omega = \{k \in \{1, \dots, n\} \mid m_k = k\} \quad (3)$$

For $n = 3$ from (2) and (3) we'll get following results:

1) $|\Omega|=3$ if $A_{(3;1,2,3)}$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

2) $|\Omega|=1$ if $A_{(3;1,3,2)}$, $A_{(3;2,1,3)}$ and $A_{(3;3,2,1)}$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

3) $|\Omega|=0$ if $A_{(3;3,1,2)}$ and $A_{(3;2,3,1)}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recall that *fixed points* of $A: I_n \rightarrow I_n$ are solutions to $A(x) = x$. Solving this equation we get that linear operator $A_{(3;1,2,3)}: I_3 \rightarrow I_3$ has only one fixed point as $(0;0;0)$. After studying all trajectories of points as $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in I_3$ under linear operator $A_{(3;1,2,3)}: I_3 \rightarrow I_3$ we can conclude following theorem:

Theorem2. For the linear operator $A_{(3;1,2,3)}: I_3 \rightarrow I_3$:

- a) the fixed point $(0;0;0)$ is an attracting fixed point if $a_{ii} < 1, i=1,2,3$;
- b) the fixed point $(0;0;0)$ is a repelling fixed point if $a_{ii} > 1, i=1,2,3$;
- c) the fixed point $(0;0;0)$ is a neutral point for all other cases.

We can get similar results for operators $A_{(3;1,3,2)}$ and $A_{(3;2,1,3)}$ also.

Consequently, we have following theorem:

Theorem3. Assume linear operator A satisfies 2) condition of the theorem1 and $|\Omega|=1$. For the linear operator $A_{(3;m_1,m_2,m_3)}: I_3 \rightarrow I_3$:

- a) the fixed point $(0;0;0)$ is an attracting fixed point if $a_{ii} < 1, a_{jk} \cdot a_{kj} < 1, i \neq j, j \neq k, i \neq k \ (i, j, k = \overline{1,3})$;
- b) the fixed point $(0;0;0)$ is a repelling fixed point if $a_{ii} > 1, a_{jk} \cdot a_{kj} > 1, i \neq j, j \neq k, i \neq k \ (i, j, k = \overline{1,3})$;
- c) the fixed point $(0;0;0)$ is a neutral point for all other cases.

We have $x^{(n)} = A^n x^0 = (a_{21}^k a_{13}^k a_{32}^k x_1^0, a_{21}^k a_{13}^k a_{32}^k x_2^0, a_{21}^k a_{13}^k a_{32}^k x_3^0)$ for all $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in I_3$

We define limiting under condition $n \rightarrow \infty$ and we'll get following theorem:

Theorem4. Assume linear operator A satisfies 2) condition of the theorem1 and $|\Omega|=0$. For the linear operator $A_{(3;m_1,m_2,m_3)}: I_3 \rightarrow I_3$:

- a) the fixed point $(0;0;0)$ is an attracting fixed point if $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} < 1$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ ($i, j, k = \overline{1,3}$);
- b) the fixed point $(0;0;0)$ is a repelling fixed point if $a_{ij} \cdot a_{jk} \cdot a_{ki} > 1$, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$ ($i, j, k = \overline{1,3}$);
- c) the fixed point $(0;0;0)$ is a neutral point for all other cases.

REFERENCES

- [1] Rozikov U.A. and Karimov M.M., *Dinamics of linear maps of idempotent measures*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 34(1), 20-28 (2013).
- [2] Juraev I.T. and Karimov M.M., *Quadratic Operators Defined on a Finite-dimensional Simplex of Idempotent Measures*, Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity, 8(3), 279-286 (2019).
- [3] Juraev I. T., *Fixed points of quadratic operators defined on a three dimensional simplex of idempotent measures*, Lob. J.Math. 43(3), 762–769 (2022).
- [4] Juraev I. T., *Trajectories of quadratic operators which map I_2 to itself*, Sci. Bull. Namangan State Univ. 1 (11), 10–18 (2019).
- [5] Juraev I. T., *Dynamics of Quadratic Operators of Idempotent Measures*, Lob. J.Math. 43(8), 2145-2154 (2022).

TAQSIMOTLARNING TO'G'RI KO'PAYTMASI

Ko'paysinova Z. Sh., Axmedov M. M.

Farg'ona Politehnika Instituti

e-mail: kopaysinovazahroxon@gmail.com

To'g'ri ko'paytmaning ta'rifi. Aytaylik $f(x)$ va $g(y)$ funksiyalar mos ravishda $G_1 \subset R^n$ va $G_2 \subset R^m$ ochiq to'plamlarda lokal integrallanuvchi funksiyalar bo'lsin. U holda $f(x)g(y)$ funksiya ham R^{n+m} fazoda lokal integrallanuvchi bo'ladi. Bu $f(x)g(y) = g(y)f(x) \in D'(G_1G_2)$ umumlashgan funksiyaning $\varphi(x, y) \in D(G_1G_2)$ asosiy funksiya ta'siri

$$\begin{aligned} (f(x)g(y), \varphi) &= \int_{G_1 \times G_2} f(x)g(y)\varphi(x, y)dx dy = \int_{G_1} f(x) \int_{G_2} g(y)\varphi(x, y)dy dx = \\ &= \int_{G_1 \times G_2} g(y)f(x)\varphi(x, y)dx dy = \int_{G_2} g(y) \int_{G_1} f(x)\varphi(x, y)dx dy \end{aligned}$$

ya'ni

$$(f(x)g(y), \varphi) = (f(x), g(y), \varphi(x, y)) \quad (1)$$

$$(g(y)f(x), \varphi) = (g(y), f(x), \varphi(x, y)) \quad (1')$$

Formulalar orqali aniqlangan (regulyar) umumlashgan funksiya bo'ladi.

Bu tengliklar takroriy integrallarning karrali integral bilan ustma-ust tushishi haqidagi Fubini teoremasini ifoda qiladi. Keyinchalik biz (1) va (1') tengliklarni $f(x) \in D'(G_1)$ va $g(y) \in D'(G_2)$ umumlashgan funksiyalarning $f(x) \times g(y)$ va $g(y) \times f(x)$ to'g'ri ko'paytmalarning ta'rifi sifatida qabul qilamiz va bu umumlashgan funksiyalarning ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ asosiy funksiya uchun

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), g(y), \varphi(x, y)) \quad (2)$$

$$(g(y) \times f(x), \varphi) = (g(y), f(x), \varphi(x, y)) \quad (2')$$

formula orqali aniqlaymiz.

1-lemma. $G' \subset G_1 \times G_2$ kompakt joylashgan ochiq to'plam va $g(y) \in D'(G_2)$ bo'lsin. U holda shunday bir $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_1(G') \subset G_1$ kompakt joylashgan ochiq to'plam va $C = C(G', g) \geq 0$, $m = m(G', g) \geq 0$ butun sonlar mavjud bo'lib, agar ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G')$ asosiy funksiya bo'lsa, u holda

$$\psi(x) \in D(\tilde{G}_1) \quad (3)$$

ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ asosiy funksiya bo'lsa, u holda

$$D^\alpha \psi(x) \in (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y)) \quad (4)$$

ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G')$, $x \in G_1$ uchun

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C \max_{\substack{(x, y) \in G \\ |\beta| \leq m}} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y)| \quad (5)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Natija. $\varphi(x, y) \rightarrow \psi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$ amali $D(G_1 \times G_2)$ fazoni $D(G_1)$ fazoga akslantiruvchi chiziqli va uzluksiz operator bo'ladi.

To'g'ri ko'paytmaning xossalari.

a) To'g'ri ko'paytmaning kommutativligi. Ixtiyoriy $f(x) \in D'(G_1)$ va $g(y) \in D'(G_2)$ umumlashgan funksiyalar uchun

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x) \quad (6)$$

formula o'rinli bo'ladi.

2-lemma. Ixtiyoriy $\varphi \in D(G_1 \times G_2)$ asosiy funksiyalar uchun

$$\varphi_k(x, y) = \sum_{i=1}^{N_k} u_{ik}(x) v_{ik}(y), u_{ik} \in D(G_1), v_{ik} \in D(G_2), k = 1, 2, \dots$$

haklidagi shunday bir $\varphi_k(x, y) \in D(G_1 \times G_2)$ asosiy funksiya ketma-ketligi mavjud bo'lib, bu ketma-ketlik $\varphi \in D(G_1 \times G_2)$ asosiy funksiyaga $D(G_1 \times G_2)$ fazoda yaqinlashuvchi bo'ladi.

b) To'g'ri ko'paytmaning assotsiativligi. Agar $f(x) \in D'(G_1)$, $g(y) \in D'(G_2)$, va $h(z) \in D'(G_3)$ umumlashgan funksiyalar bo'lsa, u holda

$$[f(x) \times g(y)] \times h(z) = f(x) \times [g(y) \times h(z)] \quad (7)$$

formula o'rinli bo'ladi

c) Agar $g \in D'(G_2)$ bo'lsa, u holda $f \rightarrow f \times g$ amali $D'(G_1)$ fazoni $D'(G_1 \times G_2)$ fazoga akslantiruvchi chiziqli va uzluksiz operator bo'ladi.

d) Agar $f(x) \in D'(G_1)$, $g(y) \in D'(G_2)$ umumlashgan funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\sup(f(x) \times g(y)) = \sup f(x) \times \sup g(y) \quad (8)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Natija. Agar $G_1 \times G_2$ ochiq to'plamda $f(x) \times g(y) = 0$ bo'lsa, u holda G_1 ochiq to'plamda $f(x) = 0$ bo'ladi.

e) Tekshirish oson bo'lgan quyidagi formulalar o'rinlidir: agar $f(x) \in D'(G_1)$, $g(y) \in D'(G_2)$ umumlashgan funksiyalar bo'lsa, u holda

$$D_x^\alpha D_y^\beta [f(x) \times g(y)] = D_x^\alpha f(x) \times D_y^\beta g(y) \quad (9)$$

$$a(x)b(y)[f(x) \times g(y)] = [a(x)f(x)] \times [b(y)g(y)] \quad (10)$$

$$f \times g(x + x_0, y + y_0) = f(x + x_0) \times g(y + y_0) \quad (11)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

ADABIYOTLAR:

[1] Sh.G'.Qosimov, T.N.Aliqulov, Sh.Q.Otayev, G'.S.Xaitboyev, M.M.Babayev "Matematik fizikaning zamonaviy usullari". Toshkent. "Universitet". 2016

UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR TO'G'RI KO'PAYTMASINING AYRIM TATBIQLARI.

Ko'paysinova Z. Sh., Toirov E. X.

Farg'ona politexnika instituti, Farg'ona, O'zbekiston
e-mail: kopaysinovazahroxon@gmail.com

Agar $F(x, y) \in D'(G_1 \times G_2)$ umumlashgan funksiya

$$F(x, y) = f(x) \times 1(y), f(x) \in D'(G_1) \quad (1)$$

shaklida tasvirlansa u holda bu $F(x, y) \in D'(G_1 \times G_2)$ umumlashgan funksiya y o'zgaruvchiga bog'liqmas deb aytiladi. Bu holda $F(x, y) \in D'(G_1 \times R^m)$ bo'ladi. $f(x) \times 1(y) = 1(y) \times f(x)$ umumlashgan funksiya $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times R^m)$ asosiy funksiyaga

$$\begin{aligned} (f(x) \times 1(y), \varphi(x, y)) &= \left(f(x), \int_{R^m} \varphi(x, y) dy \right) = \\ &= (1(y) \times f(x), \varphi(x, y)) = \int_{R^m} (f(x), \varphi(x, y)) dy \end{aligned}$$

qoida bo'yicha ta'sir qiladi. Shunday qilib ixtiyoriy $f(x) \in D'(G_1)$ va $\varphi(x, y) \in D(G_1 \times R^m)$ uchun

$$(f(x), \int_{R^m} \varphi(x, y) dy) = \int_{R^m} (f(x), \varphi(x, y)) dy \quad (2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu (2) formulani biz Fubini teoremasining o'ziga xos umumlashmasi deb qarashimiz mumkin bo'ladi. $F(x, y) \in D'(G \times (a, b))$ bo'lsin. Quyidagi uchta tasdiq ekvivalentdir:

- 1) $F(x, y)$ umumlashgan funksiya u o'zgaruvchiga bog'liq emas;
- 2) $F(x, y)$ umumlashgan funksiya $G \times (a, b)$ ochiq to'plamda y o'zgaruvchiga nisbatan translyasiyasi invariant bo'ladi, ya'ni $a < y < b$ va $a < y + h < b$ uchun

$$F(x, y + h) = F(x, y) \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

- 3) $F(x, y)$ umumlashgan funksiya $G \times (a, b)$ ochiq to'plamda

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Natija. Agar $f(x) \in D'(G)$ va G ochiq to'plamda har bir $j = 1, 2, \dots, n$ uchun $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$ tengliklarni qanoatlantirsa, u holda G ochiq to'plamda $f = \text{const}$ bo'ladi; agar $f(x) \in D'(G)$ umumlashgan funksiyaning G ochiq to'plamda barcha argumentlar bo'yicha translyasiyasi invariant bo'lsa, u holda G ochiq to'plamda $f = \text{const}$ bo'ladi.

Isbot. Ko'rinib turibdiki, bevosita $1) \rightarrow 2)$ munosabat kelib chiqadi. $f \times g(x + x_0, y + y_0) = f(x + x_0) \times g(y + y_0)$ munosabatga ko'ra $(1) \rightarrow 3)$ munosabat kelib chiqadi. Buning uchun $\frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{h} = 0$ tenglikda $D'(G \times (a, b))$ fazoda $h \rightarrow 0$ da limitga o'tsak, u holda biz $F(x, y) \in D'(G \times (a, b))$ umumlashgan funksiya (4) tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz.

Endi $3) \rightarrow 1)$ munosabat kelib chiqishini isbot qilamiz. Berilgan $F(x, y) \in D'(G \times (a, b))$ umumlashgan funksiya $G \times (a, b)$ ochiq to'plamda (4) tenglamani qanoatlantirsin. U holda ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G \times (a, b))$ funksiya uchun

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \omega_\varepsilon(y - y_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi \quad (5)$$

tasvirni hosil qilamiz, bunda $y_0 \in (a, b)$, $\varepsilon < \min(y_0 - a, b - y_0)$ va $\psi(x, y) = \int_{-\infty}^y [\varphi(x, y') - \omega_\varepsilon(y' - y_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi] dy' \in D(G \times (a, b))$ bo'ladi. $f(x) \in D'(G)$ umumlashgan funksiyaning $\chi(x) \in D(G)$ asosiy funksiyaga ta'sirini

$$(f, \chi) = (F(x, y), \omega_\varepsilon(y - y_0) \chi(x))$$

qoida bo'yicha kiritamiz va (3.5.21) tenglikni hisobga olib (3.5.22) tenglikdan

$$(F, \varphi) = \left(F(x, y), \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} + \omega_\varepsilon(y - y_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi \right) = \left(f(x), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi \right)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni isbot qilinishi kerak bo'lgan $F(x, y) = f(x) \times 1(y)$ tenglik hosil bo'ladi.

Quyidagi tasdiq ham o'rinlidir:

$F(x, y) \in D'(G \times R^1)$ bo'lsin. U holda

$$yu(x, y) = F(x, y) \quad (6)$$

tenglama yechimga ega va uning umumiy yechimi ixtiyoriy $\varphi(x, y) \in D(G \times R^1)$ asosiy funksiya uchun

$$(u, \varphi(x, y)) = (F, \psi(x, y)) + (f(x) \times \delta(y), \varphi(x, y)) \quad (7)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda $f(x) \in D'(G)$ bo'lgan ixtiyoriy umumlashgan funksiya,

$$\psi(x, y) = \frac{1}{y} [\varphi(x, y) - \eta(y)\varphi(x, 0)], \quad (8)$$

$\eta(y) \in D(R^1)$ bo'lgan ixtiyoriy funksiya bo'lib $y = 0$ nuqta atrofida $\eta(y) = 1$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, (8) tenglik bilan berilgan $\varphi \rightarrow \psi$ amali $D(G \times R^1)$ fazoni $D(G \times R^1)$ fazoga akslantiruvchi chiziqli va uzluksiz operator bo'lib (7) tenglikning o'ng qismi $D'(G \times R^1)$ fazodan olingan umumlashgan funksiya bo'ladi, bundan tashqari (F, ψ) birinchi qo'shiluvchi (6) tenglamani ikkinchi qo'shiluvchi bo'lgan $f(x) \times \delta(y)$ umumlashgan funksiya (6) tenglamaga mos

$$yu(x, y) = 0 \quad (9)$$

bir jinsli tenglamani qanoatlantiradi.

ADABIYOTLAR:

[1] Sh.G'.Qosimov, T.N.Aliqulov, Sh.Q.Otayev, G'.S.Xaitboyev, M.M.Babayev "Matematik fizikaning zamonaviy usullari". Toshkent. "Universitet". 2016

UMUMLASHGAN HARDI TENGSIZLIGI VA KATTA SONLAR QONUNI

¹Kuliyev K., ²Ergashev Sh.

¹O'zbekiston-Finlyandiya pedagogika instituti, Samarqand, O'zbekiston

²Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston

e-mail: komilkuliyev@gmail.com, sharofiddin.ergashev27@gmail.com

Bizga $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi, hamda, shu ketma-ketlikka mos $\eta_n = \eta_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ifodalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar, shunday $\{b_n\}$ sonlar ketma-ketligi mavjud bo'lib, ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\eta_n - b_n| < \varepsilon\} = 1$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlari ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Ehtimollar nazariyasiga oid klassik adabiyotlarda tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga buysinishi haqidagi natijalar tasodifiy mirdoqlar ketma-ketligining o'rta qiymatlari uchun berilgan. Unda katta sonlar qonuni o'rinli bo'lishi uchun zarur, yetarli, hamda yetarli va zarur shartlar turli olimlar tomonidan keltirilgan.

Berilgan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ushbu ifodani qaraylik

$$\eta_n = \eta_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{k=1}^n (a_{00} + a_{10}k + a_{02}k^2 + a_{10}n + a_{11}nk + a_{12}nk^2)\xi_k$$

Teorema (asosiy natija). Faraz qilaylik, $\{u_n\}$ va $\{v_n\}$ ketma-ketliklar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin

$$A = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m=1}^n |a_{10} + a_{11}m + a_{12}m^2|^{p'} v_m^{1-p'} \right)^{p-1} \cdot \left(\sum_{m=n}^{\infty} m^p u_m \right) < \infty.$$

Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ o'zaro bog'liq bo'lmagan va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdorlar

$$\sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n - M\xi_n|^p \cdot v_n < \infty$$

ketma-ketligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun ushbu tenglik o'rinli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\eta_n - M\eta_n| < \varepsilon\} = 1.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

[1] G.H.Hardy, J.E.Littlewood and G.Polya, Inequalities, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

[2] A.Kufner and L.-E. Persson, Weighted Inequalities of Hardy Type, World Scientific, Singapore, 2003.

[3] B. Opic and A. Kufner, Hardy-Type Inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics, no. 219, Long man Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[4] A.Kufner, L.Maligranda, L-E.Persson. The *Hardy inequality about its history*. World Publishing House. Pilsen 2007, 162 p.

[5] K.Kuliyev, J.Yaxshilikov. Umumlashgan Hardi tengsizligiga oid ba'zi natijalar. SamDU, Magistrantlarning XVIII-ilmiy konferensiyasi materiallari. 2018 y, 30-31b.

[6] K.Kuliyev, J.Yaxshilikov. O.Qurbonov. Diskret Hardi tengsizligi. SamDU, Magistrantlarning XVIII-ilmiy konferensiyasi materiallari. 2018 y, 32-33b.

[7] K.Kuliyev, J.Yaxshilikov. Umumlashgan Hardi tengsizligiga oid ba'zi natijalar. NamMTI. Ilmiy maqolalar to'plami. 2018 y, 31-33b.

[8] K.Kuliyev, Sh.Ergashev. Umumlashgan Hardi tengsizligiga oid ba'zi natijalar. "INNOVATIONS IN TECHNOLOGY AND SCIENCE EDUCATION" (<https://humoscience.com/index.php/itse>). 2023y. 570-579b

IKKI O'LCHAMLI PANJARADA IKKITA FERMIONLI SHREDINGER OPERATORINING XOS QIYMATLARI

Mamirov B., Abduvohidov A.

Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston

Mazkur ishda ikki o'lchamli panjarada ikkita bir xil fermionli sistemaga mos Shredinger operatorining xos qiymatlari kichik qo'zg'alishlari qaraladi. Ikki o'lchamli $\mathbb{Z}^2$ panjarada ikki fermionli Hamiltonian

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\Delta \otimes I - \frac{1}{2m}I \otimes \Delta - \hat{V}_2$$

formula bilan berilgan, bu yerda zarrachalarni ta'sirlashish operatori

$$(\hat{V}_2 \hat{\psi})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2). \\ (\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}).$$

$\hat{v}$ potensialni

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_1, & \text{agar } \mathbf{x} = 0 \\ v_2, & \text{agar } |\mathbf{x}| = 1 \\ v_3, & \text{agar } |\mathbf{x}| = 2 \\ 0, & \text{agar } |\mathbf{x}| \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishda qaraymiz.

$\hat{H}$ Hamiltonian o'rganish masalasi Hilbert fazosidagi $L_2^o(\mathbb{Z}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{Z}^2) : f(-\mathbf{q}) = -f(\mathbf{q})\}$ Hilbert fazosidagi $H(\mathbf{k})$ $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, (-\pi, \pi]^2$ Shredinger operatorini o'rganish masalasiga keladi. Shu maqsadda $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ fazoni invariant

$$L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) = L_2^o(\mathbb{T}^2),$$

$$L_2^{+-}(\mathbb{Z}^2) = L_2^-(\mathbb{Z}^2) \otimes L_2^+(\mathbb{Z}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{Z}^2) : -f(p_1, p_2) = f(-p_1, p_2) = f(-p_1, -p_2)\},$$

$$L_2^{-+}(\mathbb{Z}^2) = L_2^+(\mathbb{Z}^2) \otimes L_2^-(\mathbb{Z}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{Z}^2) : -f(p_1, p_2) = f(p_1, -p_2) = f(-p_1, -p_2)\}.$$

Qism fazolarga ajratgan holda shu fazolardagi qism operatorlarini o'rganamiz. $H(\mathbf{k})$ operatorining $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ va $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ qism fazolardagi ko'rinishini $H^{+-}(\mathbf{k})$ va $H^{-+}(\mathbf{k})$ bilan belgilaymiz. $V^{+-} = V|_{L_2^{+-}(\mathbb{Z}^2)}$ va $V^{-+} = V|_{L_2^{-+}(\mathbb{Z}^2)}$ ning $f \in L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ va $g \in L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ elementlarga ta'siri quyidagi ko'rishda bo'ladi.

$$(V^{+-}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} [v_2 \sin p_2 \sin q_2 + v_3 \sin 2p_2 \sin 2q_2 + 2v_3 \cos p_1 \cos q_1 \sin p_2 \sin q_2] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

$$(V^{-+}g)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} [v_2 \sin p_1 \sin q_1 + v_3 \sin 2p_1 \sin 2q_1 + 2v_3 \cos p_2 \cos q_2 \sin p_1 \sin q_1] g(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Teorema. Faraz qilaylik $\bar{v}$ potensial (1) ko'rinishda bo'lsin U holda shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki, har bir $\delta \in (0, \varepsilon)$ uchun $H(\pi - 2\delta, \pi)$ operator $z_1(\pi, \pi) = 4 - v_2$ ning atrofida yotuvchi ikkita har xil oddiy xos qiymatlarga ega

$$z_{(0,1)}^{+-}(\pi - 2\delta, \pi) = z_1 - \frac{2}{v_2 - v_3} \delta^2 + O(\delta^4), \quad z_{(1,0)}^{-+}(\pi - 2\delta, \pi) = z_1 - \frac{1}{v_2 - v_3} \delta^2 + O(\delta^4), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Foydalanilgan adabiyotlar.

[1] J.I. Abdullaev, B.U. Mamirov: Asymptotics behavior of eigenvalues of the two-particle discrete Schrodinger operator. Theor. Math. Phys. 176(2013), No.3, 1084-1193.

[2] J.I. Abdullaev, B.U. Mamirov: Bound states of the system of two fermions on the three-dimensional lattice. 2016 Journal Physics: Conf. Ser. 697 012022

[3] Ж.И. Абдуллаев, К.Д. Б.У. Мамиров: Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 4(2016), 3-15.

ON PLURISUBHARMONICITY AND PLURIHARMONICITY OF $(B)sh_m$

Qalandarova D. A.

Urgench state University

e-mail: dildora.qalandarova.90@mail.ru

The theory of $(B)m$ – subharmonic functions and complex equation in hessians started developing since 2006 in works of polish and French mathematicians (S.Dinew, Z.Blocki, S. Kolodziej, H.-C.Lu). In particular, Z. Blocki [1] studied this class

$$(B)sh_m = \left\{ u \in C^2 : (dd^c u) \wedge \beta^{n-1} \geq 0, (dd^c u)^2 \wedge \beta^{n-2} \geq 0, \dots, (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} \geq 0 \right\}$$

and proved a number of its properties. The $(B)sh_m$ function class is included for the L_{loc}^1 class, the theory of potentials in this class was created by Abdullaev-Sadullaev[2] and is now successfully used in a number of areas of mathematics.

Pluriharmonic functions also play an important role in the theory of functions with many complex variables. They are often used in checking the geometric properties of analytical functions, in the theory of integral formulas, in the theory of complex potentials. Initially, P. Lelong, U. Rudin, F. Forelli and R. Madrakhimov (see [3],[4],[5] and [6]) worked in this direction and a number of results were obtained.

A well-known theorem of P.Lelong (see [3, p.99] states that *if a function $u(z)$ is both harmonic, i.e., $\Delta u = 0$ and plurisubharmonic, i.e.,*

$$dd^c u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq 0, \text{ then it is pluriharmonic, i.e., } dd^c u = 0. \text{ In other words,}$$

harmonic functions are pluriharmonic in the class of plurisubharmonic functions. Developing this theory, R. Madrakhimov and M. Vaisova [7] proved the following theorem: *let $u(z)$ be a harmonic function in the unit ball $B(0,1)$ and for any point $z \in \partial B(0,1)$ the restriction $u_z(\lambda) = u(\lambda z)$ is subharmonic in $|\lambda| \leq 1$. Then the function $u(z)$ is pluriharmonic in the unit ball $B(0,1)$.*

B. Abdullayev and M. Vaisova [8] proved the following theorem: *If $u(z)$ both harmonic and m – subharmonic, $1 < m \leq n$, then it is pluriharmonic.*

In the recommended article, we show that the class of functions $(B)sh_m$ (in the case where $m = 1$) overlaps with the class of functions psh using Descartes' [9] theorem, which is one of the main theorems of the theory of polynomials:

Theorem 1. In the case $m = 1$ any $(B)sh_m$ function in domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is a plurisubharmonic function.

We also proved the following theorem:

Theorem 2. If $u(z)$ both harmonic and $(B)m$ -subharmonic, $1 \leq m < n$, then it is a pluriharmonic function.

References

- [1] Blocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation// Ann. Inst. Fourier (Grenoble), V.55:5, (2005), pp. 1735-1756.
- [2] Sadullaev A., Abdullaev B.I. Potential theory in the class of m -subharmonic functions // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012, vol. 279, pp. 155–180.
- [3] Ronkin L.I, *Introduction to the theory of entire functions of many variables*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974. Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations; Translations of Mathematical Monographs, Vol.44. MR0346175 (49#10901)
- [4] Rudin W. Pluriharmonic functions in balls // Proceedings of the American Mathematical Society, 1977. –№ 1(62), pp.44 – 46.
- [5] Forelli F. Pluriharmonicity in terms of harmonic slices // Math.Scand. – 1977. –V. 41, pp. 358– 364.
- [6] Madraakhimov R. M. Some criteria for pluriharmonicity // Izv. Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Ser. Phys. -mat. Sciences. - Tashkent, 1986. - No. 3, pp.28–32. (in Russian)
- [7] Madraakhimov R.M., Vaisova M.D., Criteria for pluriharmonicity of harmonic functions, (in Russian) DAN RUz,no.5(2008), pp.19-20.
- [8] Abdullaev B.I., Vaisova M.D. Weakly harmonic functions// Abstracts of the republican scientific conference "Actual issues of complex analysis", - Tashkent, September 19-21, 2013, pp. 45-46.(in Russian).
- [9] Kurosh.A.G., Higher algebra course, M., SCIENCE, 1968, pp. 257-277. (in Russian)
- [10] Gel'fand I.M., Lectures on linear algebra, M., SCIENCE, 1971, pp. 138-143. (in Russian).

SEPARATELY $\mathbb{R}$ –ANALYTIC FUNCTIONS

Rasulov K. K.

Urgench state university, Urgench, Uzbekistan

e-mail: rasulov.kamol@gmail.com

Well-known Hartogs's theorem [1] states that a separately analytic function is analytic, e.g., if the function $f(z, w)$ is analytic with respect to w for every fixed z and analytic with respect to z for every fixed w , then it is analytic with respect to the set of variables (z, w) . In general, we can note that the analog of this theorem for $\mathbb{R}$ –analytic functions is not true.

For example, the function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by the formula

$$f(x, y) = xy \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad f(0, 0) = 0$$

belongs to $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ and is separately $\mathbb{R}$ – analytic function, but is not $\mathbb{R}$ – analytic at the point $(0,0)$.

Separately $\mathbb{R}$ – analytic functions were studied in the works of S.Raymond[2], J.Siciak[3], J.Bochnak[4-6], Z.Blocki[7], A.Sadulleev[8-9], S.Imomkulov[10]. The following question naturally arises: In generally, how to give description of the set on which the function $f(x, y)$ is $\mathbb{R}$ – analytic? In other words: is a function $f(x, y)$ defined in a open set $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – analytic or not somewhere of the Ω , when $f(x, y)$ is $\mathbb{R}$ – analytic with respect to x for each fixed y and $\mathbb{R}$ – analytic with respect to y for each fixed x ?

Raymond [see 2] gave the next solution to this problem.

Theorem 1. *If f is separately $\mathbb{R}$ – analytic function on $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, then there exists a closed subset E of Ω such that f is $\mathbb{R}$ – analytic on $\Omega \setminus E$ and the two orthogonal projections of E are polar. Conversely, for any closed subset $E \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ with polar orthogonal projections, there exists a separately $\mathbb{R}$ – analytic function which is $\mathbb{R}$ – analytic only outside the singular set E .*

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem 2. *Let $D = \{|x| < r_1\} \subset \mathbb{R}_x$ and $G = \{|y| < r_2\} \subset \mathbb{R}_y$ be intervals, $E \subset D$ and $F \subset G$ regular compact subsets. Suppose that a function $f(x, y)$ has the following properties:*

- i) *for each fixed $y^0 \in F$, the function $f(x, y^0)$ is $\mathbb{R}$ – analytic in D ,*
- ii) *for each fixed $x^0 \in E$, the function $f(x^0, y)$ is $\mathbb{R}$ – analytic in G .*

Then we say, the function $f(x, y)$ defines some separately $\mathbb{R}$ – analytic function on $\Omega = (D \times F) \cup (E \times G)$, and $f(x, y)$ $\mathbb{R}$ – analytically continues to some domain $\widehat{\Omega} \subset D \times G$, such that $\Omega \setminus \widehat{\Omega}$ – polar.

For the cases $E = D$, $F = G$ Raymond's result strictly consequence of Theorem 2.

References

- [1] Shabat B.V. Introduction to complex analysis, Part II. Functions of several variables, Providence, RI: AMS, 1992. p 28.
- [2] Raymond J.S. Fonctions separement analytiques // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 1990. 40. pp 79–101.
- [3] Siciak J. Singular sets of separately analytic functions // *Colloq. Math.* 1990. 60/61. pp. 281–290.
- [4] Bochnak J. Analytic functions in Banach space // *Studia Mathematica*, 1970. 35. pp. 273–292.
- [5] Bochnak J. and Siciak J. A characterization of analytic functions of several real variables // *Ann. Pol. Math.* 2019. 123. pp. 9–13.
- [6] Bochnak J. and Kucharz W. Algebraic surfaces determine analyticity of functions // *Arch. Math.* 2022. 118. pp. 57–63.
- [7] Blocki Z. Singular sets of separately analytic functions // *Ann. Polon. Math.* LVI. 1992. 2. pp. 219–225.

[8] Sadullaev A. Holomorphic continuation of a formal series along analytic curves // *Complex Variables and Elliptic Equations*, Published on: 22 Sep 2020. pp. 1–10.

[9] Sadullaev A. Real analyticity of a $\mathbb{C}^\infty$ – germ at an origin // *Annales Polonici Mathematici* 2022. 128. pp. 87–97.

[10] Imomkulov S.A. Continuation of $\mathbb{R}$ –analytic functions parallel lines // *TWMS J. Pure Appl. Math.* (preprint).

RIMANNING DZETA FUNKSIYASINING KOMPLEKS NOLLARI MAVJUD BO‘LMAGAN SOHANING CHEGARASI UCHUN ANIQLASHTIRILGAN BAHO

Safarov A. Sh.

Termiz davlat universiteti, Termiz, O‘zbekiston

e-mail: asafarov1977@mail.ru

Biz bu ishda avvalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Agar $1 < \sigma < 1,03$ bo‘lsa,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma-1} - \gamma_0 + 0,1856352(\sigma-1) < \frac{1}{\sigma-1}$$

bajariladi. Bunda $\gamma_0 = 0,57721566 \dots$ – Eyler doimiysi.

Isboti. Rimanning dzeta funksiyasining $\sigma > 1$ bo‘lgandagi yoyilmasi [1]

$$\zeta(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (\sigma-1)^n$$

dan

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{1}{\sigma-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}_n (\sigma-1)^n \quad (1)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bunda $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0$ va $n \geq 1$ bo‘lganda

$$\bar{\gamma}_n = (n+1)\gamma_n - (\gamma_{n-1}\bar{\gamma}_0 + \gamma_{n-2}\bar{\gamma}_1 + \dots + \gamma_0\bar{\gamma}_{n-1}). \quad (2)$$

γ_n koeffitsientlar uchun .I.Allakov [2] tomonidan isbotlangan quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{m=1}^N \frac{\ln^n m}{m} - \frac{\ln^{n+1} N}{n+1} - \frac{\ln^n N}{2N} + \sum_{r=1}^{k_0-1} \frac{B_{2r}}{(2r)!} f_n^{(2r-1)}(N) - \frac{\theta B_{2k_0}}{(2k_0)!} f_n^{(2k_0-1)}(N) \right), \quad (n \geq 1), \quad (3)$$

Bunda $0 < \theta < 1$; B_j – j -Bernulli soni; $k \geq 1$ – butun son;

$$f_n^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\frac{\ln^n x}{x} \right), \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots);$$

k_0 soni $N - 1 \leq x \leq N$ bo'lganda $f_n^{(2k_0)}(x)$ va $f_n^{(2k_0+2)}(x)$ lar bir xil ishorali qilib tanlanadi.

(3)- formulani qo'llab (1) va (2) lardan lemmadagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

Natija. $x \geq 1$ bo'lsa,

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < \ln x + \gamma_0 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} \quad (4)$$

tengsizlik o'rinli.

Endi biz Sh.Valle-Pussenning quyidagi teoremasini isbotlashimiz mumkin.

Teorema. Shunday o'zgarmas $s > 0$ soni mavjudki, s – kompleks tekislikning

$$Res = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln(|t| + 2)}$$

sohasida dzeta funksiya nollarga ega emas.

Isboti. Ma'lumki, $\zeta(s)$ funksiya $s = 1$ nuqtada qutbga ega. Shuning uchun ham biror ν_0 musbat soni uchun $|s - 1| \leq \nu_0$ sohada bu funksiya nollarga ega emas. Faraz qilaylik, $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ qaralayotgan $\zeta(s)$ funksiyaning $|\gamma_n| > \nu_0$ shartni qanoatlantiruvchi noli bo'lsin. U holda $\sigma > 1$ bo'lganda

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

bo'lgani uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$- \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it \ln n};$$

bundan

$$- \operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \ln n).$$

Ixtiyoriy φ – haqiqiy soni uchun $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geq 0$ tengsizlik o'rinli.

Yuqoridagi lemmadan $1 < \sigma < 2$ bo'lganda,

$$- \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1}$$

ning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Teoremadan

$$- \operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < c_1 \ln(|t| + 2) - \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right)$$

bunda $|t| + 2 \geq T_0 \geq 3$ va

$$c_1 = \frac{1}{(T_0^2 + 1) \ln T_0} + \frac{-1 + \ln 2\pi}{\ln T_0} + 1 + \frac{\gamma}{\ln T_0} + \frac{3}{2T_0 \ln T_0} + \frac{1}{12 T_0^2 \ln T_0}.$$

Agar bu yerda $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$ va $0 \leq \beta_n \leq 1$ bo'lgani uchun

$$\operatorname{Re} \frac{1}{s - \rho_n} = \operatorname{Re} \frac{1}{(\sigma - \beta_n) + i(t - \gamma_n)} = \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} > 0$$

va

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\rho_n} = \frac{\beta_n}{\beta_n^2 + \gamma_n^2} \geq 0$$

ekanliklarini e'tiborga olsak,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) < c_1 \ln(|t| + 2) - \frac{\sigma - \beta_n}{(\sigma - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2}.$$

Bundan esa isbotlanishi talab etilgan

$$\beta_n \leq 1 - \frac{1}{14c_3 \ln(|\gamma_n| + 2)}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Shunday qilib $s = \frac{1}{14c_3}$

Natija. Teoremada $s = 0,0121$ deb olish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Voronin S.M., Karatsuba A.A. Dzeta funktsiya Rimana.-M.: Fizmatlit. 1994. - 268s

[2] Allakov I. Sonlar nazariyasining ba'zi additiv masalalarini analitik usullar bilan yechish.-T, «Ta'lim» 2012, 200b.

ABSOLUTE CONTINUITY OF INVARIANT PROBABILITY MEASURES OF CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH BREAK POINT

Safarov U.A.

Turin Polytechnic University in Tashkent.

e-mail: safarovua@mail.ru

In this work we study regularity of two invariant measures of circle homeomorphisms with single break point.

We consider an orientation preserving homeomorphism f of the circle S^1 with lift $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, i.e. $f(x) = F(x) \pmod{1}$, $x \in S^1$, where $F(x)$ is continuous, strictly increasing and $F(x+1) = F(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^1$. The most important arithmetic characteristic of the homeomorphism f is the rotation number:

$$\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} \pmod{1}.$$

Henceforth, F^n denotes the n th iterate of the function F . Denjoy proved (see [1]) that if f is a circle diffeomorphism with irrational rotation number ρ_f and $\log f'$ is of bounded variation, then f is topologically conjugate to the linear rotation $f_\rho: x \rightarrow x + \rho_f$; that is, there exists an essentially unique homeomorphism φ of the circle such that $\varphi \circ f = f_\rho \circ \varphi$ (see [2]). This

classical result can be extended to the case of circle homeomorphisms with break points.

It is well known that every circle homeomorphism with irrational rotation number ρ_f has a unique f -invariant probability measure μ_f . Note that the conjugating map φ and the invariant measure μ_f are related by $\varphi(x) = \mu_f([0, x])$ (see [2]). The last relation implies that regularity properties of the map φ imply corresponding properties of the density of the absolutely continuous invariant measure μ_f . The problem of relating the smoothness of φ to that of f has been studied extensively.

A natural extension of circle diffeomorphisms are piecewise smooth homeomorphisms with break points.

Definition 1. Let f be a circle homeomorphisms with a lift F . The point $x_b \in S^1$ is called **break point** of the homeomorphism f , if there exists an one-sided positive derivatives $F'(x_b - 0)$, $F'(x_b + 0)$ and $F'(x_b - 0) \neq F'(x_b + 0)$.

The ratio
$$\sigma_f(x_b) = \frac{F'(x_b - 0)}{F'(x_b + 0)}$$
 is called jump ratio of f at the point x_b .

The regularity properties of the invariant measures of such maps are quite different from the diffeomorphisms. For example in the works [3]-[6] were shown that, the invariant probability measure of piecewise-smooth circle homeomorphisms with break points and irrational rotation number is singular w.r.t. Lebesgue measure.

Now consider two piecewise-smooth circle homeomorphisms f_1 and f_2 with a break point and the same irrational rotation number ρ . Our main goal is studied smoothness of density of two invariant measures μ_1 and μ_2 of the circle homeomorphisms f_1 and f_2 , respectively.

Theorem 1. Let $f_i, i=1,2$ be a $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b^{(i)}\})$ circle homeomorphisms with a break point $x_b^{(i)}$. Suppose that

- 1) they have the same irrational rotation number ρ of bounded type;
- 2) the jump ratios $\sigma_{f_1}(x_b^{(1)})$ and $\sigma_{f_2}(x_b^{(2)})$ coincide i.e. $\sigma_{f_1}(x_b^{(1)}) = \sigma_{f_2}(x_b^{(2)})$.

Then invariant measures μ_1 and μ_2 are equivalent and its density $h(x)$ belongs to the class $C(S^1)$ of a circle homeomorphisms.

REFERENCES

- [1]. Denjoy A. Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore. Math. Pures et Appl.-1932.-N11.- P.333-375.

[2]. Cornfeld I.P., Fomin S.V. and Sinai Ya.G. Ergodic Theory. Springer Verlag, Berlin.-1982.

[3]. Dzhililov A.A. and Khanin K.M. On invariant measure for homeomorphisms of a circle with a point of break. Funct. Anal. Appl.-1998.-№ 3.-P.153-161.

[4]. Dzhililov A.A. and Liousse I. Circle homeomorphisms with two break points. Nonlinearity. – 2006.-V.19.-P.1951-1968.

[5]. Dzhililov A.A., Liousse I. and Mayer D. Singular measures of piecewise smooth circle homeomorphisms with two break points. Discrete and continuous dynamical systems.-2009.-№2.-P. 381-403.

[6]. Dzhililov A.A., Mayer D. and Safarov U.A. Piecewise-smooth circle homeomorphisms with several break points. Izvestiya: Mathematics. - 2012.-№1.-P. 95-113.

CHIZIQLI VA QAVARIQ FUNKSIYALAR UCHUN O‘RTA QIYMAT

Satliqov G'. R., Qurbonova M. D.

Urganch davlat universiteti, Urganch, O‘zbekiston

e-mail: gsatlikov81@gmail.com, malohatqurbonova24@gmail.com

Funksiyalar nazriyasida ko‘pgina funksiyalar sinfi uchun integral o‘rta qiymat xossalari o‘rinli bo‘ladi va bu kabi xossalarni aksariyat xollarda shu sinfni tavsiflovchi alternativ ta’rif sifatida qabul qilingan. Bunga misol sifatida garmonik va subgarmonik funksiyalarni misol keltirish mumkin. Biz ushbu ishda bir o‘zgaruvchili chiziqli va qavariq funksiyalar uchun integral o‘rta qiymat xossasi bu funksiyalar sinfini aniqlash uchun kriteriya bo‘la olishini ko‘rsatamiz.

$f(x)$ – funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan va $a < x_1 < x_2 < b$ bo‘lsin. $f(x)$ funksiya grafigidagi $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Uning tenglamasi quyidagicha
$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

bo‘lishini keltirib chiqarish qiyin emas. Tenglikni o‘ng qismini $l(x)$ orqali belgilasak, bu tenglik $y = l(x)$ qisqa ko‘rinishga keladi, $l(x_1) = f(x_1)$ va $l(x_2) = f(x_2)$ ekanligi ravshan.

1-ta’rif. Agar $a < x_1 < x_2 < b$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_1 va x_2 sonlar olinganda ham $\forall x^0 \in (x_1, x_2)$ sonlar uchun $l(x^0) \geq f(x^0)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda qavariq deyiladi[2].

Geometrik jihatdan bu ta’rif shuni anglatadiki, uchlari $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalarni tutashtiruvchi funksiya grafigi shu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq grafigidan pastda joylashadi. Shu ta’rifga asoslanib, qavariq funksiyaning subchiziqli deb ham atashadi.

2-ta’rif. Agar $(a;b)$ oraliqda uzluksiz va deyarli differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning grafigi uning shu oraliqdagi deyarli barcha nuqtasiga o’tkazilgan urinmadan yuqorida joylashsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda qavariq deyiladi[1].

Ushbu ishni asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1-teorema. $f(x) \in C[a;b]$ bo’lsin. $f(x)$ –chiziqli funksiya bo’lishi uchun $\forall x^0 \in (a;b)$ nuqta olinganda ham $(x^0 - h; x^0 + h) \subset (a;b)$ shartni qanoatlantiruvchi yetarlicha kichik $h > 0$ sonlarda

$$\int_{x^0-h}^{x^0+h} f(x) dx = 2h \cdot f(x^0)$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

2-teorema. $C^2[a;b]$ sinfga qarashli $f(x)$ funksiya qavariq funksiya bo’lishligi uchun $\forall x^0 \in (a;b)$ nuqta va $\forall h > 0: [x^0 - h; x^0 + h] \subset (a;b)$ sonlar uchun

$$f(x^0) \leq \frac{1}{2h} \cdot \int_{x^0-h}^{x^0+h} f(t) dt$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Adabiyotlar ro’yxati

[1] W.K.Hayman, P.B.Kennedy. Subharmonic functions. Vol. 1. Acad. Press, London etc., 1976, 284 p.

[2] Л.Д. Кудрявцев, Курс математического анализа 1-том. 2003.

QATOR ORALARIGA ISHLOV BERISHDA O‘SIMLIKLAR ZARARLANISHINING EHTIMOLIY-STATISTIK MODELI

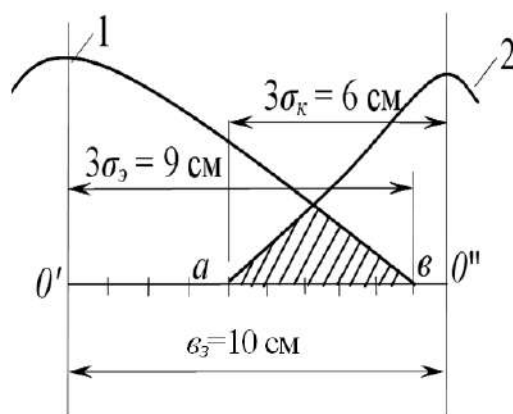
Soliev X.M., Abduvaliev Yu.A., Sharipov M.A.

Namangan muxandislik-qurilish instituti, Namangan, O‘zbekiston

E-mail: soliev_2608@mail.ru

Chopiq ekinlari yetishtiriladigan sug‘oriladigan maydonlarda keng himoya zonalarini qoldirish yomon, zero o‘simlik tuplarining shundoq yonboshidan o‘tlar ko‘karib chiqadi, sug‘orishdan keyin nihollarni qisib, rivojlanishiga xalaqit beradigan qattiq qatlam hosil bo‘ladi. Shu sababli kultivatsiyadan so‘ng tuproqqa ko‘pincha qo‘l kuchi yordamida qo‘shimcha ishlov berishga to‘g‘ri keladi. Demak, Qator oraliga ishlov berishdagi kultivatsiya jarayonida himoya zonasi kengligini to‘g‘ri tanlash ham agrotexnik, ham iqtisodiy jihatdan katta ahamiyatga ega [1-2].

Qator oraliga ishlov berishda himoya zonasining kengligi v_z bo‘lganda shikastlanadigan o‘simliklarning ehtimoliy ulushi qo‘yidagi ifoda orqali aniqlandi:



5-rasm. $av = 5$ sm kenglikdagi
tasma ichida shikastlangan
o'simliklar ulushi

$$V_3 = \Phi\left(\frac{3\sigma_K - e_3}{\sigma_3}\right) \Phi\left(\frac{3\sigma_3 - e_3}{\sigma_K}\right) 100\%.$$

Ushbu ifodaga binoan e_3 kenglikdagi himoya zonasiga ega bo'lgan o'simliklarni shikastlanish ehtimolini o'simliklarni qator o'qidan siljishi (σ_e) ga va kultivator pichog'i chekka nuqtasini harakat yo'nalishidan siljishi (σ_k) ga bog'liq ravishda hisoblash imkonini beradi [3-4].

1-hisobiy variant. Paxta yetishtirishda e_3 , σ_3 va σ_K parametrlarning ruxsat etilgan qiymatlari: $e_3 = 10$ sm [5], $\sigma_3 = \pm 3$ sm, $\sigma_K = \pm 2$ sm. V_3 qiymati hisoblansin (1-rasm).

Yechish. Ruxsat etilgan qiymatlarni (1) formulaga qo'yamiz:

$$V_3 = \phi\left(\frac{3 \cdot 2 - 10}{3}\right) \phi\left(\frac{3 \cdot 2 - 10}{2}\right) 100\% = \phi(-1,33) \phi(-0,50) \cdot 100\% =$$

$$= 0,0918 \cdot 0,3085 \cdot 100\% = 0,0283 \cdot 100\% = 2,83\%$$

(1-rasmdagi shtrixlangan yuza).

2-hisobiy variant. Kultivator agregatining bir o'tishida shikastlanadigan o'simliklar miqdori 1% dan oshmasligi kerak, ya'ni $[V_3] \leq 1,0\%$. σ_K , σ_3 va e_3 ning qanday qiymatlarida bu talab qondiriladi [6].

Yechish. Turli raqamlarda bajarilgan hisob-kitoblar bu talabni σ_K , σ_3 va v_z parametrlarning $\sigma_K = 1,55$ sm, $\sigma_3 = 3$ sm va $e_3 = 10$ sm qiymatlarida qondirilishini ko'rsatdi:

$$V_3 = \phi\left(\frac{3 \cdot 1,55 - 10}{3}\right) \phi\left(\frac{3 \cdot 3 - 10}{1,55}\right) 100\% = \phi(-1,78) \phi(-0,64) 100\% =$$

$$= 0,0375 \cdot 0,2611 \cdot 100\% = 0,00979 \cdot 100\% = 0,979\% \approx 1,0\%.$$

Demak, kultivator ko'ndalang tebranishining ruxsat etilgan o'rtakvadratik chetlashishi qiymatini $\sigma_K = \pm 2$ sm emas, balki $\sigma_K = \pm 1,55$ sm etib belgilash kerak.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan ehtimoliy-statistik modellardan foydalanib qatorlab ekiladigan turli o'simliklar uchun himoya zonalari kenglik (ϵ_3) lari, o'simliklarni qator (σ_3) va kultivatorni harakat yo'nalishidan (σ_K) o'rtakvadratik chetlashishlarining ratsional qiymatlarini hisoblash va asoslash mumkin.

3-hisobiy variant. $\epsilon_3 = 10$ sm, $\sigma_e = \pm 3$ sm bo'lgan paxta dalasi qator oralarini kultivatsiyalashda to'rt qatorli kultivator agregati uchun qiymatlari $\sigma_k = 4$ sm, olti qatorli kultivator agregati uchun $\sigma_k = 3,5$ sm bo'lgan o'rtakvadratik chetlashishlar olingan. Har ikki agregat uchun ν_3 qiymatlari aniqlansin.

Yechish. Amaldagi to'rt qatorli kultivator agregati uchun:

$$V_3 = \phi\left(\frac{3 \cdot 4 - 10}{3}\right) \phi\left(\frac{3 \cdot 3 - 10}{4}\right) 100\% = \phi(0,66) \phi(-0,25) 100\% = \\ = 0,7454 \cdot 0,4013 \cdot 100\% = 0,2991 \cdot 100\% = 29,91\%;$$

Olti qatorli yangi agregat uchun:

$$V_3 = \phi\left(\frac{3 \cdot 3,5 - 10}{3}\right) \phi\left(\frac{3 \cdot 3 - 10}{3,5}\right) 100\% = \phi(0,16) \phi(-0,28) 100\% = \\ = 0,5636 \cdot 0,3897 \cdot 100\% = 0,2196 \cdot 100\% = 21,96\%.$$

Ko'rinib turibdiki, to'rt qatorli agregat o'rniga olti qatorli agregatdan foydalanilganda o'simliklarni shikastlanish ehtimoli 7,95 foizga kamaygan.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan ehtimoliy-statistik modeldan foydalanib qatorlab ekiladigan turli o'simliklar uchun himoya zonalari kenglik (ϵ_3) lari, o'simliklarni qator (σ_3) va kultivatorni harakat yo'nalishidan (σ_K) o'rtakvadratik chetlashishlarining ratsional qiymatlarini hisoblash va asoslash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Toshboltaev M., Xudaykuliev R., Soliev X. Sakkiz qatorli kultivator bilan ratsional agregatlanadigan traktor rusumini tanlash algoritimi //Mexanika muammolari. – 2019. – T. 3. – S. 56-59.

[2] To'lanov X. Yuqori manevrli chopiq traktori bilan agregatlangan universal ramali 8 qatorli kultivator // O'zbekiston qishloq xo'jaligi JURNALI. – 2017. – T. 6. – S. 41.

[3] Soliev X.M. Keng qamrovli qishloq xo'jalik mashinalarini agregatlanishini tadqiq etish uslubiyati // Fan va ishlab chiqarish integratsiyasi qishloq xo'jaligi samaradorligining muhim omili: Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi, 21-22 noyabr 2013 yil. – Samarqand qishloq xo'jalik instituti. – Samarqand, 2013. – B. 162-165.

[4] To'lanov X., To'xtaboev M. A. Keng qamrovli paxtachilik mashinalari uchun energetika vositasini tanlashda unga ta'sir etuvchi muhim faktorlar //Agro Ilm. – 2017. – T. 4. – №. 48. – S. 97-98.

[5] Mirzadavlatovich, S. H., & Akhmadjanovich, T. M. (2017). Mathematic model of course stability wide-coverage sowing and cultivator machine-tractor aggregate. European science review, (11-12), 143-146.

[6] M.Tuxtabaev I.Tulanov, B.Kurambaev, X.Soliev (2018) Keng qamrovli 6-qatorli kultivator agregatining quvvat balansi. Agro Ilm, 6, 97-98.

XARTOGS QATORI YORDAMIDA FUNKSIYANI GOLOMORF DAVOM QILDIRISH

Xujamov J., Kadirova X.

Urganch davlat universiteti, Urganch, O'zbekiston

e-mail: xjumanazar71@gmail.com, kadirovaxilolaxon@gmail.com

Ushbu

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z) \cdot w^k \quad (1)$$

ko'rinishidagi qatorga Xartogs qatori deyiladi. Bunda $c_k(z)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) funksiya $U = \{z \in \mathbb{C}_z, |z| < r, r > 0\}$ sohada golomorf bo'lgan funksiya.

Har bir fiksirlangan $z \in U$ larda (1) sonli qatorning yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasiga asosan $R(z) = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k(z)|}}$ formula bo'yicha

aniqlanadi ([1] ga qarang). Umuman olganda (1) qatorning yaqinlashish to'plami

$$H = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, |z| < r, |w| < R_*(z)\}$$

sohadan iborat bo'ladi. Bunda $R_*(z) = \lim_{\xi \rightarrow z} R(\xi)$.

Agar $f(z, w)$ funksiya $H = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, |z| < r, |w| < R, 0 < r, 0 < R\}$ sohada golomorf bo'lsa, u holda bu funksiya

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z) w^k \quad (2)$$

Xartogs qatoriga yoyiladi ([1] ga qarang). Bunda $c_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z, \xi) d\xi}{\xi^{k+1}}$,

$k = 0, 1, 2, \dots$ va $\gamma_\rho = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = \rho, 0 < \rho < R\}$.

Xartogs qatori umumlashgan holatda, A. Sadullaev va E.M.Chirka ([2]), S.A.Imomqulov va J.U.Xujamov ([3]) ishlarida o'ragnilgan. Ularning ishlarida (1) qatorning $\{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, |z| < r, |w| < R\}$ soha ichida tekis yaqinlashishi

keltirilgan. Bunda $R(z) = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k(z)|}}$, $E \subset \mathbb{C}_z$ – ixtiyoriy polyar bo'lmagan

kompakt.

Ta'rif: $A \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ – to'plam algebraik to'plam deyiladi, agar shunday $P(z, w)$ ko'phad topilib, $A = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, P(z, w) = 0\}$ bo'lsa.

Algebraik to'plamlar va ularning xossalari ([4]), ([5]) ishlarda batafsil keltrilgan. Ushbu ishda $P(z, w) = z - w^2$ bo'lgan holatda $A = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, z - w^2 = 0\}$ silliq sirt ustida golomorf bo'lgan funktsiyani Xartogs qatoriga yoyish masalasi o'rganildi. Aytaylik, $f(z, w)$ funktsiya $\{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, |z| < r, |w| < r, r > 0\}$ polikrugda golomorf va har bir

funksirlangan $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < d = \max_{\substack{|z| < r, \\ |w| < r}} |z - w^2| \right\}$ uchun

$F_\lambda = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, z - w^2 = \lambda\}$ algebraik to'plam bo'yicha golomorf davom qilsin. U holda $\varphi(\lambda, w) = f(w^2 + \lambda, w)$ funktsiyani w va λ bo'yicha $\Omega = \{(w, \lambda) : |w| < r, |w^2 + \lambda| < r\}$ polidoirada golomorf. Bu funktsiyani ω ni darajalari bo'yicha - Xartogs qatoriga yoyamiz.

$$\varphi(\lambda, w) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\lambda) \cdot w^k \quad (3)$$

Bunda

$$c_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} \frac{\varphi(\lambda, \xi)}{\xi^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Shartimizga ko'ra $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < d = \max_{\substack{|z| < r, \\ |w| < r}} |z - w^2| \right\}$ bo'lganda bu qator

yaqinlashish radiusi ∞ bo'ladi ya'ni $u_k(\lambda) = \frac{1}{k} \ln |c_k(\lambda)|$ subgarmonik funktsiyalar ketma-ketligi yuqoridan lokal tekis chegaralangan va har bir tayinlangan $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < d = \max_{\substack{|z| < r, \\ |w| < r}} |z - w^2| \right\}$ uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |c_k(\lambda)| = -\infty$ tenglik

bajarildi. Bu ketma-ketlik uchun Xartogs lemmasini qo'llab, berilgan qator $\{|\lambda| < d\} \times \mathbb{C}_w$ sohaning kompakt qism to'plamlarida tekis yaqinlashini ko'ramiz va demak, bu sohada golomorf bo'ladi. $c = z - w^2$ almashtirish bilan orqaga qaytsak, $f(z, w)$ funktsiyamizni $D = \{(z, w) : |z - w^2| < d\}$ sohada golomorf bo'lishini ko'ramiz. Shunday qilib biz ushbu teorema kalamiz:

Teorema: $f(z, w)$ funktsiya $G = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, |z| < r, |w| < r, r > 0\}$

polikrugda golomorf va har bir funksirlangan $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < d = \max_{\substack{|z| < r, \\ |w| < r}} |z - w^2| \right\}$

uchun $F_\lambda = \{(z, w) \in \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w, z - w^2 = \lambda\}$ algebraik to'plamning barcha

nuqtalariga golomorf davom qilsin. U holda $f(z, w)$ funksiya $D = \{(z, w) : |z - w^2| < d\}$ sohaga golomorf davom etadi.

Adabiyotlar.

- [1] Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Част 2. Москва, “Наука”, 1985г.
- [2] А. Садуллаев и Е.М.Чирка. О продолжении функций с полярными особенностями. Мат.сб. 1987г. т. 132(174) №3. С. 383-390.
- [3] S.A. Imomkulov, J.U. Khujamov. On holomorphic continuation of functions along boundary sections. Math. Bohemica. Czechia Republic-2005.
- [4] Е.М. Чирка. Комплексные аналитические множества. Москва-1985.
- [5] С. Ленг. Алгебра. - М.: Мир, 1968.

ELLIPSOIDDA KOSHI-FANTAPPE INTEGRAL FORMULASI

Yusupbayeva H. E.

O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston

e-mail: dreamer98997@gmail.com

Mexanika va matematikaning turli sohalarida o‘zingning ko‘p sonli amaliy yondashuvlarga ega bo‘lgan bir kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazaryasidagi Koshi integral formulasi kabi ko‘p o‘lchovli kompleks analizda Boxner -Martinelli integral formulasi konstruktiv va samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi. Boxner -Martinelli integral formulasi oddiy munosabatni, $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada golomorf bo‘lgan funksiyani uning ∂D chegaradagi qiymatlari orqali ifodalaydi.

Bir kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazaryasida ushbu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(x)}{x - z} dx$$

koshining integral formulasi muhim o‘rin tutadi. Bu barcha sohalar uchun universal integral formula bo‘lib, universallik faqatgina $\mathbb{C}$ kompleks tekislik uchun o‘rinli [1]. ($n > 1$) fazoda ham Koshining integral formulasiga o‘xshash formula mavjudmi? Mavjud bo‘lsa u qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu savolga javob berishga dunyoning ko‘p matematik olimlari harakat qilishdi. Lekin bu savol umumiy holda javob bermasdan har bir soha (masalan, shar, polidoira, klassik sohalar, poliedrik sohalar) uchun alohida ko‘rinishdagi integral formulalar olish bilan chegaralandi. Shunga qaramay, hozirgacha Koshining integral formulasiga o‘xshash universal formula topilgani yo‘q [2-4].

Yuqoridagi xossalarni o‘zida saqlovchi integral formulalardan biri Martinelli-Boxner integral formulasi hisoblanadi, ya’ni 1938-yilda Martinelli va 1943-yilda Boxnerlar umumiy formulani bir-biriga o‘xshamagan usullar yordamida isbotlashdi.

Teorema ([1]). Istalgan chegarasi bo‘lakli silliq $D \subset \mathbb{C}^n$ soha uchun $f(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(\overline{D})$ bo‘lsa, ushbu

$$f(z) = \int_{\partial D} f(x) w(x-z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(x) \frac{s(x-z)}{|x-z|^{2n}} \quad (1)$$

integral formula o‘rinli bo‘ladi.

Bu formula $n=1$ bo‘lganda (1) formula Koshining integral formulasiga aylanadi. Keyinchalik J.Lere tomonidan topilgan va Koshi-Fantappe formulasi deb nomlanuvchi Martinelli-Boxner integral formulasidan yanada umumiyroq formula olingan. Ushbu taqdimotda quyidagi

$$I(R_1, R_2, \dots, R_n) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sum_{\nu=1}^n \frac{|z_\nu|^2}{R_\nu^2} < 1 \right\}$$

ellipsoid uchun Martinelli-Boxner va Koshi-Fantappe integral formulalar keltiriladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

[1] Б.В. Шабат. “Введение в комплексный анализ”. Част I, II. Москва: «Наука» 1976 г, 577 с.

[2] А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец. “Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе”. Красноярск СФУ. 2010 г, 390 с.

[3] Кытманов А. М., Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, ред. А. М. Кытманов, Наука, Новосибирск, 2002, 240 с.

[4] Хенкин Г.М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. –Т.7 –М.:1985.– С.23–124.

СВОЙСТВА ОЦЕНОК В СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО ЦЕНЗУРИРОВАНИЯ С ДВУХ СТОРОН

^{1,2}*Абдикаликов Ф.А., ¹Эрисбаев С.А., ¹Сейтахов Р.П.*

¹*Каракалпакский государственный университет*

²*Каракалпакское отделение института математики имени В.И.Романовского АН РУз.*

e-mail: abdikalikovf@mail.ru

Пусть случайная величина (с.в.) Z , например время жизни пациента, находится под влиянием другой с.в. X , означающей дозу лекарства. На практике, как правило с.в. Z полностью ненаблюдаема и может подвергаться случайному цензурированию с двух сторон с.в. Y_1 и Y_2 . Предполагается, что с.в. (Z, Y_1, Y_2) - независимы в совокупности при заданной ковариате $X = x$. Пусть $\{(Z_i, Y_{1i}, Y_{2i}), i = \overline{1, n}\}$ - независимые реализации с.в. (Z, Y_1, Y_2) . Схема цензурирования такова, что в n -м шаге эксперимента наблюдается выборка $S^{(n)} = \{(\xi_i, \delta_{0i}, \delta_{1i}, \delta_{2i}), i = \overline{1, n}\}$, где $\xi_i = \max\{Y_{1i}, \min(Z_i, Y_{2i})\}$, $\delta_{0i} = I(\min(Z_i, Y_{2i}) < Y_{1i})$, $\delta_{1i} = I(Y_{1i} \leq Z_i \leq Y_{2i})$, $\delta_{2i} = I(L_i \leq Y_i < Z_i)$ и $I(A)$ - индикатор события A . Пусть F_{x_i} , G_{1x_i} , G_{2x_i} , и H_{x_i} - условные функции

распределения (ф.р.) с.в. Z_i , Y_{1i} , Y_{2i} и ξ_i при заданной $X = x_i$ являются непрерывными. Рассмотрим случай, когда x_i являются фиксированными точками дизайна из $[0,1]$: $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. В рассматриваемой модели интересующие нас Z_i наблюдаемы только при $\delta_{1i} = 1$ и задача состоит в оценивании условной ф.р. F_x по выборке $S^{(n)}$. Такую задачу впервые при случайном цензурировании справа рассматривал Беран [2], предложив оценку множительной структуры из работы [3]. В дальнейшем эта оценка была исследована также и в работах [4, 5]. Авторы [1] построили и исследовали оценку степенной структуры. В настоящей работе рассматривается специальная информативная модель, т.е. при всех $t \geq 0$:

$$1 - G_{1x}(t) = (1 - F_x(t))^{\theta_x + 1}, \quad 1 - G_{2x}(t) = (1 - F_x(t))^{\theta_x}, \quad (1)$$

где θ_x – положительный неизвестный параметр.

Следует отметить, что данная модель, определяемая формулами (1), характеризуется тем, что формулы (1) эквивалентны независимости с.в. ξ_x и векторов $(\delta_{0x}, \delta_{1x}, \delta_{2x})$. Данное свойство модели играет существенную роль при исследовании следующей оценки $F_x(t)$, построенной по $S^{(n)}$ с учетом (1):

$$1 - F_{xh}(t) = \left[1 - (H_{xh}(t))^{1/2} \right]^{\gamma_{xh}}, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где $\gamma_{xh} = 2p_{1xh}$, $H_{xh}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\xi_i \leq t)$, $p_{mxh} = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) I(\delta_{mi} = 1)$,

$$m = 1, 2, \quad \omega_{ni}(x; h_n) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_n} \pi \left(\frac{x-y}{h_n} \right) dy \left(\int_0^{x_n} \frac{1}{h_n} \pi \left(\frac{x-y}{h_n} \right) dy \right)^{-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь $x_0 = 0$, π – известная функция плотности и $\{h_n\}$ – последовательность положительных постоянных такая, что $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Далее нами будут использованы следующие обозначения:

$$\underline{\Delta}_n = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \overline{\Delta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad m_v(\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y^v \pi(y) dy, \quad v = 1, 2.$$

Легко видеть, что ввиду условий (1) $T_{F_x} = T_{G_{1x}} = T_{G_{2x}} = T_{H_x} = \inf \{t \geq 0 : H_x(t) = 1\}$ и

$\tau_{F_x} = \tau_{G_{1x}} = \tau_{G_{2x}} = \tau_{H_x} = \sup \{t \geq 0 : H_x(t) = 0\}$ и рассмотрим условия:

(У1) $x_n \rightarrow 1$, $\overline{\Delta}_n = O(n^{-1})$, $\overline{\Delta}_n - \underline{\Delta}_n = o(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$;

(У2) π – плотность с носителем $[-M, M]$, при $M > 0$, $m_1(\pi) = 0$ и π удовлетворяет условию Липшица 1-порядка;

(У3) $\ddot{H}_x(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x(t)$, $H_x''(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_x(t)$, $\dot{H}_x'(t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} H_x(t)$ существуют и непрерывны для $(t, x) \in [\tau, T] \times [0, 1]$, где $\tau_{H_x} < \tau < T < T_{H_x}$;

(У4) $\ddot{p}_{mx} = \frac{d^2}{dx^2} p_{mx}$, $m=1, 2$ существуют и непрерывны для $x \in [0, 1]$.

При условиях (У1)-(У4) для оценки (2) установлены следующие результаты:

1. Результат об асимптотическом представлении оценок:

$$F_{xh}(t) - F_x(t) = \sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x; h_n) \Psi_{tx}(\xi_i, \delta_{1i}, \delta_{2i}) + O((nh_n)^{-1} \log n).$$

2. Свойство о равномерной сильной состоятельности оценок с оценкой скорости сходимости:

$$\sup_{\tau \leq t \leq T} |F_{xh}(t) - F_x(t)|^{п.н.} = O((nh_n)^{-1/2} (\log n)^{1/2}).$$

3. Свойство асимптотической нормальности оценок:

$$(nh_n)^{1/2} (F_{xh}(t) - F_x(t)) \xrightarrow{d} N(a_x(t); \sigma_x^2(t)).$$

4. Слабая сходимость процесса $\{W_{nx}(t) = (nh_n)^{1/2} (F_{xh}(t) - F_x(t)), \tau \leq t \leq T\}$ в пространстве Скорохода $D[\tau, T]$ к гауссовскому процессу $W_x(t)$:

$$W_{nx}(\cdot) \rightarrow W_x(\cdot) \text{ в } D[\tau, T].$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abdushukurov A.A, Abdikalikov F.A, Estimation of conditional distribution function under nonparametric regression with fixed design. // J. Mathem. Sciences. – 2022. Vol. 267. – № 1. – P.132-138.
- [2] Beran R. Nonparametric regression with randomly censored survival data. Technical Report. Univ. California. Berkeley. – 1981. – 19p.
- [3] Kaplan E.L., Meier P. Nonparametric estimation from incomplete observations. // J.A.S.A. – 1958. – Vol. 53. – P.457-481.
- [4] Van Keilegom I., Veraverbeke N. Estimation and bootstrap with censored data in fixed design nonparametric regression. // Ann. Inst. Statist. Math. – 1997. – Vol. 49. – №3. – P.467-491.
- [5] Veraverbeke N., Cadarso-Suares C. Estimation of the conditional distribution in a conditional Koziol-Green model. // Test. – 2000. – Vol.9. – №1. – P. 97-122.

АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВА КРАМЕРА-РАО ДЛЯ МОДЕЛИ КОНКУРИРУЮЩИХ РИСКОВ

^{1,2}Абдикаликов Ф.А., ¹Эрисбаев С.А., ¹Насыров П.Б.

¹Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

²Каракалпакское отделение института математики имени

В.И.Романовского АН РУз

e-mail: abdikalikovf@mail.ru

В случае цензурированных наблюдений неравенства Крамера-Рао и Баттачария впервые были рассмотрены в работе [1]. Позднее эти результаты были обобщены на случай байесовского подхода, а также для выборок случайного объёма [2]. Целью настоящей работы является исследования свойств информации Фишера и установление аналога неравенства Крамера-Рао для наблюдений, образующих модель конкурирующих рисков (МКР).

Для фиксированного натурального числа k , пусть $\{X_j^{(1)}, \dots, X_j^{(k)}, j \geq 1\}$ последовательность независимых и одинаково распределённых независимых случайных величин (с.в.) с соответствующими маргинальными функциями распределения (ф.р.) $\{F^{(1)}, \dots, F^{(k)}\}$, зависящими от одного и того же

неизвестного скалярного параметра $\theta \in \Theta \subset R$. Пусть $f^{(i)}(t; \theta) = \frac{\partial F^{(i)}(t; \theta)}{\partial \theta}$ и

$\lambda^{(i)}(t; \theta) = \frac{f^{(i)}(t; \theta)}{1 - F^{(i)}(t; \theta)}$ функции плотности и интенсивности отказов,

соответствующие ф.р. $F^{(i)}, i = \overline{1, k}$. В МКР наблюдаются векторы

$\{X_j, \delta_j^{(1)}, \dots, \delta_j^{(k)}, j \geq 1\}$ интерес представляют также и пары

$\{(X_j, \delta_j^{(i)}), j \geq 1\}, i = \overline{1, k}$, где $X_j = \min(X_j^{(i)}, 1 \leq i \leq k)$ и $\delta_j^{(i)} = I(X_j = X_j^{(i)})$

индикаторы указанных в скобках событий. Пусть $H(t; \theta) = P_\theta(X_j \leq t)$ ф.р.с.в.

X_j и $H^{(i)}(t; \theta) = P_\theta(X_j \leq t, \delta_j^{(i)} = 1)$ – субраспределения, соответствующие

парам $\{(X_j, \delta_j^{(i)}), i = \overline{1, k}\}$. Тогда $H(t; \theta) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - F^{(i)}(t; \theta)]$ и существуют

$h(t; \theta) = \frac{\partial H(t; \theta)}{\partial t} = \sum_{i=1}^k h^{(i)}(t; \theta)$, где $h^{(i)}(t; \theta) = f^{(i)}(t; \theta) \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k [1 - F^{(l)}(t; \theta)]$.

Интегральные функции интенсивности, соответствующие H и $H^{(i)}$

обозначим так $\Lambda(t; \theta) = \int_{-\infty}^t \frac{dH(u; \theta)}{1 - H(u; \theta)}$ и $\Lambda^{(i)}(t; \theta) = \int_{-\infty}^t \frac{dH^{(i)}(u; \theta)}{1 - H(u; \theta)}$.

$\lambda(t; \theta) = \sum_{i=1}^k \lambda^{(i)}(t; \theta)$ плотность интенсивности X . Через

$m^{(i)}(t; \theta) = E_{\theta} \left[\delta_j^{(i)} / X_j = t \right]$ обозначим регрессии $\delta_j^{(i)}$ относительно с.в. X_j .

Введем некоторые условия регулярности:

(Y1) $N^{(i)} = \{t \in R^1 : h^{(i)}(t; \theta) > 0\}$ не зависят от параметра θ и $\bigcap_{i=1}^k N^{(i)} \neq \emptyset$;

(Y2) $\frac{\partial^m h^{(i)}(t; \theta)}{\partial \theta^m}, m=1, 2; i=\overline{1, k}; (t; \theta) \in R \times \Theta$;

(Y3) $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^m h^{(i)}(t; \theta)}{\partial \theta^m} \right| dt < \infty, m=1, 2; i=\overline{1, k}; \theta \in \Theta$;

(Y4) Для всех $\theta \in \Theta : I_{(X, \delta^{(i)})}^{(i)}(\theta) \in (0; +\infty), i=\overline{1, k}$;

Если через $\kappa(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}; \theta)$ обозначим совместную плотность вектора $\{X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)}\}$ относительно меры $\nu(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)})$, то

$$\kappa(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}; \theta) = \prod_{i=1}^k \left\{ f^{(i)}(t; \theta) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k (1 - F^{(l)}(t; \theta)) \right\}^{y^{(i)}}, \quad (t; \theta) \in R \times \Theta,$$

где $d\nu(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = dt \times \Delta_{y^{(1)}} \times \dots \times \Delta_{y^{(k)}}$ и $\Delta_{y^{(i)}}$ – считающая мера, сосредоточенная в точке $y^{(i)} \in \{0; 1\}, i=\overline{1, k}$.

Теорема 1. В условиях (Y1)-(Y4) справедливы представления для $I_{(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})}(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$:

$$I_{(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})}(\theta) = \sum_{i=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln \lambda^{(i)}(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dH^{(i)}(t; \theta) = I_X(\theta) + \sum_{i=1}^k I_{(\delta^{(i)}/X)}^{(i)}(\theta),$$

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln \lambda(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dH(t; \theta),$$

$$I_{(\delta^{(i)}/X)}^{(i)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln h^{(i)}(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 m^{(i)}(t; \theta) dH(t; \theta).$$

Теперь сформулируем неравенства Крамера-Рао для несмещенной оценки $\hat{\varphi}(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})$ функции $\varphi(\theta)$ по $(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})$.

(Y5) $\varphi(\theta)$ – непрерывна дифференцируема, $\varphi'(\theta) \neq 0$ и для всех $\theta \in \Theta$:

$$\int_{R^1 \times \{0, 1\}^k} \hat{\varphi}(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \theta} \kappa(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}; \theta) d\nu(t, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}; \theta) = \varphi'(\theta).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия регулярности (У1)-(У5) и $D_\theta \hat{\varphi} \in (0, +\infty)$. Тогда для всех $\theta \in \Theta$ справедливо неравенство

$$D_\theta \hat{\varphi}(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)}) \geq \frac{(\varphi'(\theta))^2}{I_{(X, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})}(\theta)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Abdushukurov A.A., Kim L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattacharya bounds for randomly censored data. *J. Soviet. Math.*, 1987. v.38, N.5. p. 2171 - 2185.

[2] Prakasa Rao, B.L.S. Remarks on Cramer-Rao type integlas inequalities for randomly censored data. In «*Analysis of Censored Data*». *Lecture Notes-Monograph Series*. 1995. N. 27. p. 163-175.

[3] Абдушукуров А.А., Эрисбаев С.А. Информация Фишера и неравенство типа Крамера–Рао для модели конкурирующих рисков. *Бюллетень Института Математики*, 2021, Vol. 4, №5, стр. 50-58.

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

¹Аноров О.У., ²Шамсиддинов Н.Б.

¹Ташкентский государственный транспортный университет.

²Академический лицей ТГТУ имени И.А. Каримова.

e-mail: anorovobidjon6@gmail.com shamsiddinov1974nb@gmail.com

Пусть (E, F) измеримое пространство и $S(E, F)$ множество всех вероятностных мер на (E, F) . Отображение $V: S(E, F) \rightarrow S(E, F)$ называется квадратичным стохастическим оператором (ксо), если для любой меры $\lambda \in S(E, F)$, ее образ $V\lambda$ определяется равенством

$$V\lambda(A) = \int_E \int_E P(x, y, A) d\lambda(x) d\lambda(y), \quad (1)$$

где $A \in F$ и семейство переходных вероятностей $\{P(x, y, A): x, y \in E, A \in F\}$ удовлетворяет условиям: i) для любых $x, y \in E$, $P(x, y, \cdot) \in S(E, F)$; ii) для любого $A \in F$ функция $P(x, y, A)$ измерима относительно переменных x, y ; iii) для любых $x, y \in E, A \in F, P(x, y, A) = P(y, x, A)$.

Ксо (1) называется дискретным, если множество E конечно или счетно. Ксо (1) называется абсолютно непрерывным если для любой меры $\lambda \in S(E, F)$ мера $V\lambda$ абсолютно непрерывна относительно меры λ .

Если E конечно, в [1] доказано что ксо V абсолютно непрерывно тогда и только тогда когда V вольтеровский оператор.

В этой работе мы рассмотрим случай когда E счетное множество.

Пусть $E = N$ - множество положительных целых чисел. На этом множестве семейство переходных вероятностей $\{P(i, j, \{k\}) \equiv P_{ij,k}: i, j, k \in N\}$ определяет абсолютно непрерывный ксо, если

$$P_{ij,k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \notin \{i, j\} \\ \alpha, & \text{если } j = i + 1 \text{ и } k = i \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |i - j| \geq 2 \text{ и } k \in \{i, j\} \end{cases}$$

(2)

Так как $P_{ij,i} + P_{ij,j} = 1$, из $P_{i(i+1),i} = \alpha$ следует $P_{i(i+1),i+1} = 1 - \alpha$.

Для произвольного $x = (x_1, x_2, \dots) \in S(N, F)$ если $\alpha = 1$, семейство (2) порождает ксо

$$(Vx)_k = \begin{cases} x_1(1 + x_2) & \text{при } k = 1 \\ x_k(1 - x_{k-1} + x_{k+1}) & \text{при } k > 1 \end{cases} \quad (3)$$

и если $\alpha = 0$, семейство (2) порождает ксо

$$(Vx)_k = \begin{cases} x_1(1 - x_2) & \text{при } k = 1 \\ x_k(1 + x_{k-1} - x_{k+1}) & \text{при } k > 1 \end{cases} \quad (4)$$

В этой работе мы изучим предельное поведение траекторий абсолютно непрерывных операторов (3) и (4).

Пуст $n = 2$. Тогда (3) следующим образом:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2), \\ x'_2 = x_2^2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 = 1 - x_1$ будем исследовать следующее уравнение

$$x_1 = x_1(1 + 1 - x_1) \Rightarrow x_1 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = 1, x_1 = 0.$$

В этом случае для оператора (5) неподвижной точка (1; 0) и (0; 1).

Теорема 1. Для квадратичного стохастического оператора (5) справедлива следующие условия:

1. (1; 0) и (0; 1) точки является неподвижной.
2. Траектория любой точки симплекса сходится к точке (1; 0).

Литература:

- [1] Н.Н.Ганиходжаев, О. У. Аноров. Об одном классе непрерывных квадратичных стохастических операторов. Uzbek Mathematical Journal, 2008, 2, 26-34.
- [2] Nasir Ganikhodjaev, Dmitriy V. Zanin (2004). On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on the two-dimensional simplex. Russian Mathematical Surveys, 59 (3). , 0 pp. 571-572. ISSN 0036-0279 (P), 1468-4829 (O).

О РАЗЛОЖЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЕМ ДАФФИНА, В РЯД ТЕЙЛОРА

Данилов О.А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

e-mail: odanilov@ngs.ru

Целью работы является доказательство теоремы существования и единственности разложения в ряд Тейлора по системе псевдостепеней

дискретной аналитической функции первого рода, определенной уравнением Даффина и заданной в положительном квадранте гауссовой плоскости.

Обозначим через $\mathbb{G} = \{z = x + iy: x, y \in \mathbb{Z}\}$ - гауссову плоскость, а через $\mathbb{G}^+ = \{z \in \mathbb{G}: x \geq 0, y \geq 0\}$ - положительный квадрант гауссовой плоскости. Пусть комплекснозначная функция f определена на множестве $\mathbb{G}^+$ и некоторая тройка чисел $T = \{z, z+1, z+i\} \subset \mathbb{G}^+$. Тогда f - дискретная аналитическая функция первого рода на тройке T , если справедливо соотношение:

$$\frac{f(z+1) - f(z)}{1} = \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \quad (1)$$

или, иначе,

$$cr(f(z)) = f(z+1) + if(z+i) - (1+i)f(z) = 0. \quad (2)$$

Если соотношение (1) верно для любой тройки $T = \{z, z+1, z+i\} \subset \mathbb{G}^+$ то функция f называется *дискретной целой функцией первого рода*. Множество всех дискретных целых функций первого рода обозначим $\mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$.

Класс функций $\mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$ не замкнут относительно умножения. Так $z, z^2 \in \mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$, но $z^3 = z^2 \cdot z \notin \mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$. Множество $\mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$ есть векторное пространство относительно сложения функций и умножения их на комплексное число.

Оператор cr , введенный формулой (2) является дискретным аналогом оператора Коши - Римана из комплексного анализа, а само уравнение (2) называется *уравнением Даффина*. (см. [1],[2])

Для уравнения (2) введем экспоненту $e(\xi, z)$ и псевдостепени $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$, принадлежащие классу $\mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$, по формуле

$$e(\xi, z) = e(\xi, x, y) = e^{\xi x} (1 - i + ie^\xi)^y = \sum_{k=0}^\infty \frac{\pi_k(z)}{k!} \xi^k. \quad (3)$$

Функции $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$, определенные формулой (3), являются дискретными полиномами и служат аналогами степеней $\{z^k\}_{k=0}^\infty$. Так, $\pi_0(z) = 1, \pi_1(z) = z, \pi_2(z) = z^2 + iy$. (см. [3],[4],[5])

Обозначим $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ множество целых функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. С каждой целой функцией $F(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k \xi^k$ ассоциируем дискретный ряд $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$. В работе [5] доказано, что для любой целой функции $F(\xi)$ ассоциированный дискретный ряд $f(z) \in \mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$ и корректно определено отображение $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$ по формуле

$$\Theta: (F(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k \xi^k) \rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k. \quad (4)$$

Определим для функции $f \in \mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$ *разложение Тейлора* равенством

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \pi_k(z) \quad (5)$$

при всех $z \in \mathbb{G}^+$, где ряд в правой части формулы (5) сходится абсолютно. Справедлива следующая теорема существования и единственности.

ТЕОРЕМА. 1) (Существование) *Любое решение $f(z)$ уравнения Даффина (2) на $\mathbb{G}^+$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+.$$

Указанное разложение не единственно. При этом $f(z) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $F(s) = 0, s = 0, 1, 2, \dots$, где

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \in \mathcal{A}(\mathbb{C}).$$

2) (Не единственность) Отображение $\Theta: F(\xi) \rightarrow f(z)$, определенное формулой (4) осуществляет эпиморфизм линейного пространства $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ на линейное пространство $\mathcal{D}_1(\mathbb{G}^+)$. Ядро указанного эпиморфизма $\text{Ker } \Theta$ имеет вид

$$\text{Ker } \Theta = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \mathcal{A}(\mathbb{C}) = \Gamma(\xi + 1) \sin(\pi\xi) \mathcal{A}(\mathbb{C}),$$

где $\Gamma(\xi)$ – гамма-функция Эйлера.

Список литературы

- [1] Isaacs R.F. A Finite Difference Function Theory // Univ. Nac. Tucuman. Revista A. 1941. V. 2. P. 177-201.
- [2] Duffin R.J. Basic Properties of Discrete Analytic Functions // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 335-363.
- [3] Zeilberger D. A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. V. 23 (Series A). P. 95-104.
- [4] Медных А. Д. Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Киев: Наук. думка. 1982. С. 137-144.
- [5] Данилов О.А. О разложении дискретных аналитических функций в ряд Тейлора // Математические Заметки Я-ГУ. 2010, Т. 17, вып. 2. С. 21-32.

ТЕОРЕМЫ О КУСОЧНО–НЕПРЕРЫВНЫХ И КУСОЧНО–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЯХ И ОБОБЩЁННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Даужанов А. Ш., Омаров Т. М.

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
e-mail: aynazard@mail.ru

Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции широко используются в математическом анализе (в теории рядов Фурье), в теории обработки сигналов, математической статистике, программировании и других разделах математики. В теории обобщённых функций доказывается, что если f – локально кусочно непрерывная функция с точками разрыва $a_1, a_2, \dots$ и соответствующим величинами скачков $h_1, h_2, \dots$, причём производная $f'(x)$ при $x \notin \{a_i\}$ совпадает со значениями некоторой локально кусочно непрерывной функции $\tilde{f}(x)$, то верно равенство

$f'(x) = \tilde{f}'(x) + \sum_k h_k \delta(x - a_k)$, где $f'(x)$ – обобщённая производная, $\tilde{f}'(x)$ – обычная производная, скачок функции f определяется так:

$$h_k = f(a_k + 0) - f(a_k - 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(a_k + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(a_k - \varepsilon).$$

Этим вопросам посвящена специальная литература, в которой можно найти формулировки и доказательства соответствующих теорем (см., например, [1],[2],[4],[5]). В данной работе определяются обобщённые производные функции и классические (обычные) производные имеют в точке $x = 0$ разрывы 1-го рода.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках, за исключением конечного числа точек, в которых имеет разрывы 1-го рода и кроме этого, имеет односторонние пределы в точках a и b .

Будем называть функцию *кусочно-гладкой* на отрезке, если она кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке.

Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции имеют широкие применения в теории обобщённых функций.

Будем рассматривать совокупность всех функций $\varphi(x) \in D$, которые бесконечно дифференцируемы и финитны (т.е. каждая функция $\varphi = 0$ вне некоторого отрезка). Функции из D называются *основными*.

Обобщённой функцией над пространством D называется любой линейный непрерывный функционал, определённый на множестве основных функции D равенством

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D. \quad (1)$$

Пусть $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\varphi \in D$. Тогда справедливо формула интегрирования по частям

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -(f, \varphi'). \quad (2)$$

Равенство (2) принимается за определение обобщённой производной обобщённой функции f .

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и является кусочно-гладкой на любом сегменте. Рассмотрим случай, когда она имеет единственную точку разрыва - точку x_0 . Для скачка функции в этой точке введём обозначение:

$$[f(x)]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Справедлива следующая

Теорема (см., например, [1], [2], [4] о связи классической и обобщённой производных кусочно-гладкой функции). Производная в смысле

теории обобщённых функций равна сумме производной в обычном смысле и произведения скачка на обобщённую функцию δ , сосредоточенной в точке разрыва:

$$Df = f' + [f]_{x_0} \cdot \delta(x - x_0), \quad (3)$$

где $\delta(x - x_0)$ – дельта-функция Дирака со сдвигом аргумента на точку x_0 .

В частности, если функция непрерывна, то скачок в точке x_0 равен нулю и производная в смысле теории обобщённых функций совпадает с производной в обычном смысле.

Пример 1. Найдём производные функции $\theta(x)$ – Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Функция Хевисайда при $x = 0$ терпит разрыв от 0 до 1:

$$[\theta(x)]_{x=0} = 1. \text{ Согласно (3), получаем}$$

$$D\theta = \theta' + [\theta]_{x_0} \cdot \delta(x) = 0 + 1 \cdot \delta(x) = \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

т.е. в точке разрыва производная разрывной функции равна δ – дельта-функции. Производная 2-го порядка равна: $\theta''(x) = \delta'(x)$.

2. Рассмотрим функцию $|x|$. Функция $|x|$ является непрерывной кусочно-гладкой функцией, и её обычная производная равна $|x'| = \operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1$. Скачок функции в точке $x = 0$ равен нулю, поэтому по формуле (3), для обобщённой производной имеем

$$|x'| = Df = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0) = \operatorname{sign} x + 0 \cdot \delta(x - 0) = \operatorname{sign} x;$$

$$|x|'' = D^2 f = (\operatorname{sign} x)' = \{(\operatorname{sign} x)'\} + [1 - (-1)]\delta(x - 0) = 0 + 2\delta(x) = 2\delta(x).$$

Библиографический список

- [1] Агранович М.С. Обобщённые функции. М., МЦНМО, 2014.
- [2] Александров В.А. Обобщённые функции. Новосиб. гос. ун-т, 2005.
- [3] Аленицын А.Г., Грикуров В.Э. Обобщённые функции в математической физике. СПбГУ, 2001.
- [4] Бутузов В.Ф., Бутузова М.В. Ряды и интеграл Фурье. Обобщённые функции. М., 2017.
- [5] Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., Наука 1982.
- [6] Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщённые функции и действия над ними. М., Добросвет, 2000.
- [7] Пожарский А.А. Методическое пособие. СПбГУ, 2015.
- [8] Бельхеева Р.К. Обобщённые функции в примерах и задачах. Новосиб.

[9] Даужанов А.Ш. Методические изложения элементов теории обобщённых функций// Научно-методический журнал «ILM SARCHASHMALARI», Ургенч. гос. ун-т. 2020. №10. С. 11-25.

[10] Даужанов А.Ш. и др. Методы теории обобщённых функций. Нукус «ILIMPAZ», 2021.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГЛАДКИХ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

¹Джалилов А. А., ²Абдухакимов С. Х.

¹Туринского политехнического университета,

²Джиззакский государственный педагогический университет

e-mail: adzhalilov21@gmail.com, asaidahmat@mail.ru

В настоящей работе изучаются вероятностные инвариантные меры эргодических гомеоморфизмов окружности с одной критической точкой в которой производная равно нулю. Пусть $\rho \in (0,1)$ иррациональное число, и ее разложение в непрерывную дробь имеет вид $\rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots]$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Обозначим через X_ρ^{cr} множество пар $(\xi(x), \eta(x))$ аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой, удовлетворяющих следующим условиям [1]:

$$a) 0 < \xi(0) < 1;$$

$$b) \xi(0) = \eta(0) + 1;$$

$$в) \xi(\eta(0)) = \eta(\xi(0));$$

$$г) \xi(\eta(0)) < 0, \xi^2(\eta(0)) < 0, \dots, \xi^{k_1-1}(\eta(0)) < 0;$$

$$д) \xi^{k_1}(\eta(0)) > 0;$$

$$е) \xi'(0) = \eta'(0) = \xi''(0) = \eta''(0) = 0; \xi'''(0) \neq 0, \eta'''(0) \neq 0;$$

$$ф) (\xi \circ \eta)'''(0) = (\eta \circ \xi)'''(0).$$

Условия $a) - ф)$ позволяют при помощи каждой пары $(\xi, \eta) \in X_\rho^{cr}$ построить гомеоморфизм единичной окружности $[\eta(0), \xi(0))$:

$$T_{\xi, \eta}(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{если } x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x) & \text{если } x \in [0, \xi(0)). \end{cases} \quad (1)$$

Число вращения $\rho = \rho(\xi, \eta)$ для гомеоморфизма $T_{\xi, \eta}(x)$ определяется обычным образом [2]. Точка $x_0 = 0$ является единственной кубической критической точкой отображения $T_{\xi, \eta}(x)$. Типичным примером таких отображений является семейство точкой отображений Арнольда:

$$f_\theta(x) = x + \theta - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \pmod{1}. \text{ Обозначим через } X_\rho \text{ подмножество таких}$$

$(\xi, \eta) \in X_\rho^{cr}$ что $\rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots]$, $k_1, k_2 \in N$. Определим преобразование ренормгруппы $R_{k_i} : X_\rho^{cr} \rightarrow X_\rho^{cr}$ по формуле:

$$R_{k_i}(\xi, \eta) = ((\alpha_i \xi^{\xi^{k_i-1}}(\eta(\alpha_i^{-1}x))), (\alpha_i \xi^{\xi^{k_i-1}}(\eta(\xi(\alpha_i^{-1}x))))),$$

где $\alpha_i(\xi, \eta) = (\xi^{\xi^{k_i-1}}(\eta(0)) - \xi^{k_i}(\eta(0)))^{-1}$. В силу условий а) и в) обе константы $\alpha_i < -1$, $i = 1, 2$. В работе Остлунда и др.[1] изучены неподвижные точки преобразования R_{k_i} и его структура вблизи неподвижной точки (линеаризация, устойчивые многообразия и т.д.). Преобразование ренормгруппы R_{k_i} в подмножестве X_ρ имеет единственную неподвижную точку (ξ_{cr}, η_{cr}) [1], [3]. Функции $\xi_{cr}(x)$ и $\eta_{cr}(x)$ являются вещественно аналитическими. Обозначим $T_{\xi_{cr}\eta_{cr}} = T_{cr}$. Описание многих физических явлений может быть сведено к изучению статических свойств сингулярных инвариантных мер [4]. Как уже отмечалось, вероятностные инвариантные меры критических гомеоморфизмов окружности с иррациональными числами вращения являются сингулярными относительно меры Лебега λ (см.[6]). Определим четыре гильбертовские показатели сингулярности инвариантной меры μ :

$$\underline{\tau}^{(1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|}, \quad \overline{\tau}^{(1)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|}, \quad \text{если } \rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots], \quad k_1, k_2 \in N.$$

$$\underline{\tau}^{(2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|}, \quad \overline{\tau}^{(2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|}, \quad \text{если } \rho = [k_2, k_1, k_2, k_1, \dots], \quad k_1, k_2 \in N.$$

Функции $\underline{\tau}^{(1)}(x), \underline{\tau}^{(2)}(x)$ и $\overline{\tau}^{(1)}(x), \overline{\tau}^{(2)}(x)$ и являются инвариантными относительно T_{cr} . Отсюда, а также из эргодичности T_{cr} относительно мер μ и λ [5] следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ и по мере λ . Эти постоянные обозначим $\underline{\tau}^{(1)}(\mu), \underline{\tau}^{(2)}(\mu), \overline{\tau}^{(1)}(\mu), \overline{\tau}^{(2)}(\mu)$ и $\underline{\tau}^{(1)}(\lambda), \underline{\tau}^{(2)}(\lambda), \overline{\tau}^{(1)}(\lambda), \overline{\tau}^{(2)}(\lambda)$ соответственно. Грачек и Светек [5] показали, что для кубических критических гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения “ограниченного типа” справедливы неравенства

$$1 < \underline{\tau}^{(1)}(\lambda) \leq \overline{\tau}^{(1)}(\lambda) < \infty, \quad 1 < \underline{\tau}^{(1)}(\mu) \leq \overline{\tau}^{(1)}(\mu) < \infty, \quad \text{если } \rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots], \quad k_1, k_2 \in N.$$

$$1 < \underline{\tau}^{(1)}(\lambda) \leq \overline{\tau}^{(1)}(\lambda) < \infty, \quad 1 < \underline{\tau}^{(1)}(\mu) \leq \overline{\tau}^{(1)}(\mu) < \infty, \quad \text{если } \rho = [k_2, k_1, k_2, k_1, \dots], \quad k_1, k_2 \in N. \quad (3)$$

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 1. Пусть μ – вероятностная инвариантная мера критического гомеоморфизма T_{cr} . Тогда для почти всех x по мере Лебега λ (и по мере μ) существует следующие конечный пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|} = \tau^{(1)}(\lambda) (= \tau^{(1)}(\mu)), \text{ если } \rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots], \quad k_1, k_2 \in N.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu([x, x + \varepsilon])}{\log |\varepsilon|} = \tau^{(2)}(\lambda) (= \tau^{(2)}(\mu)), \text{ если } \rho = [k_2, k_1, k_2, k_1, \dots], \quad k_1, k_2 \in N.$$

и его значение не зависит от x .

Литература

- [1] Ostlund R., Rand D., Sethna J., Siggia E. Physica D. 1983. V. 8.303.
- [2] Конфелед И. П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория М.: Наука, 1980.
- [3] Mestel B.D. Computer Assisted Proof of Universality for Cubic Critical Maps of the Circle with Colder Mean Rotation Number. Ph.D. Thesis. Warwick University, 1985;
- [4] J.-P. Eckmann, H. Epstein. Commun. Math.Phys.1986. V.107.P.213.
- [5] Chabra A., Jensen R. V. Phys. Rev.Lett. 1989.V.62.P.1327.
- [6] Crazyk J., Swiatek G. Comm. Math.Phys.1993.V. 157.P.213.

Λ - СЕПАРАТНО ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

¹Имомкулов С.А., ²Абдикадиров С.М.

¹Навоийский государственный педагогический институт, Навоий,
Узбекистан

²Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
e-mail: sevdiyor_i@mail.ru, subxan01102017@gmail.com

Пусть α – произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k], \quad \alpha_{jk}(z) \in C^1(D), \quad d\alpha = 0.$$

здесь

$$dz[j] = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge \dots \wedge dz_n,$$

$$d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n.$$

Строго положительность α означает, что для любой компактной области $\Omega \Subset D$ существует число $\varepsilon > 0$ такое что дифференциальная форма $\alpha - \varepsilon \beta^{n-1} \geq 0$, $\beta = dd^c |z|^2$.

Определение 1 (см. [1], [2]). Дважды непрерывно дифференцируемая в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z)$ называется α – гармонической, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в D .

Оператор $dd^c u \wedge \alpha$ является эллиптическим оператором (см. [2]) и когда $\alpha = \beta^{n-1}$, мы получим $dd^c u \wedge \beta^{n-1} = (n-1)! \Delta u dV$ – классические гармонические функции. Так как оператор $dd^c u \wedge \alpha$ является эллиптическим

оператором второго порядка и теория эллиптических уравнений математической физики здесь применима.

В частности, если коэффициенты дифференциальной формы α принадлежат классу k -раз непрерывно дифференцируемых функций: $\alpha_{jk} \in C^k$, $j, k = \overline{1, n}$, то решение уравнение $dd^c u \wedge \alpha = 0$ существует и принадлежит классу C^{k+2} . Более того, если коэффициенты α_{jk} – вещественно-аналитические функции, то решение $u(z)$ также является вещественно-аналитической функцией (см. например [3]).

Мы будем считать, что дифференциальная форма α принадлежит классу C^k (классу вещественно-аналитических функции $\mathbb{R}A$), если коэффициенты $\alpha_{jk} \in C^k$ ($\alpha_{jk} \in \mathbb{R}A$), $j, k = \overline{1, n}$.

Пусть α' и α'' строго положительные, замкнутые дифференциальные формы соответственно бистепени $(n-1, n-1)$ и $(m-1, m-1)$.

Рассмотрим следующие операторы действующие в пространстве $C^2(D \times G)$, $D \times G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$:

$$\begin{aligned} d_z d_{\bar{z}}^c u(z, w) \wedge \alpha'(z) &= \left[\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u(z, w)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k \right] \wedge \left[\left(\frac{i}{2} \right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^n \alpha'_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k] \right] = \\ &= \left(\frac{i}{2} \right)^n \sum_{j,k=1}^n (-1)^{k+j+1} \alpha'_{jk}(z) \frac{\partial^2 u(z, w)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k, \quad \forall w \in G \subset \mathbb{C}_w^m; \\ d_w d_{\bar{w}}^c u(z, w) \wedge \alpha''(w) &= \left[\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 u(z, w)}{\partial w_j \partial \bar{w}_k} dw_j \wedge d\bar{w}_k \right] \wedge \left[\left(\frac{i}{2} \right)^{m-1} \sum_{j,k=1}^m \alpha''_{jk}(w) dw[j] \wedge d\bar{w}[k] \right] = \\ &= \left(\frac{i}{2} \right)^m \sum_{j,k=1}^m (-1)^{j+k+1} \alpha''_{jk}(w) \frac{\partial^2 u(z, w)}{\partial w_j \partial \bar{w}_k} dw_j \wedge d\bar{w}_k, \quad \forall z \in D \subset \mathbb{C}_z^n. \end{aligned}$$

Определение 2. Функция $u(z, w) \in C^2(D \times G)$, называется Λ - *сепаратно гармонической* в области $D \times G$, где $\Lambda = (\alpha', \alpha'')$, если удовлетворяет следующие условия:

- 1) $d_z d_{\bar{z}}^c u(z, w) \wedge \alpha'(z) = 0$, для любого фиксированного $w \in G$;
- 2) $d_w d_{\bar{w}}^c u(z, w) \wedge \alpha''(w) = 0$, для любого фиксированного $z \in D$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $u(z, w) \in C^2(D \times G)$ является Λ - сепаратно гармонической, то по совокупности переменных она является $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \beta$ - гармонической функцией, т. е.

$$dd^c u(z, w) \wedge \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \beta = 0, \quad \forall (z, w) \in D \times G.$$

Литература

[1] Б.И. Абдуллаев, С.А. Имомкулов, Р.А. Шарипов. α - субгармонические функции. // Современная математика. Фундаментальные направления. РУДН, том 67, № 4 (2021), стр. 620-633.

[2] Ваисова М.Д. Теория потенциала в классе α -субгармонических функций. // Узбекский математический журнал, Ташкент, 2016, №3, стр. 46-52.

[3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Изд. МИР. Москва, 1966. – 351 с.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРБИТ ТОЧЕК ИЗЛОМА ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

Каримов Ж.Ж.

Тушинский политехнический университет в городе Ташкенте

e-mail: jkarimov0702@gmail.com

Рассмотрим отображение окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0, T(x_0)\})$, $\varepsilon > 0$, с двумя точками излома x_0 и $T(x_0)$, и с иррациональным числом вращения

$\omega = [1, 2, 1, 2, \dots] = \sqrt{3} - 1$. Через $\frac{p_n}{q_n}$ обозначим n -ю подходящую дробь ω , $\frac{p_n}{q_n} = [1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2]$. Числа q_n , $n \geq 1$ называются временем первого возвращения Пуанкаре для отображения T .

Возьмём произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим её орбиту

$$\mathbb{O}_T(x_0) = \{x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T^2(x_0), \dots, x_n = T^n(x_0), \dots\}.$$

При помощи орбиты $\mathbb{O}_T(x_0)$ определим последовательность $\{\mathbb{P}_n(x_0), n \geq 1\}$ динамических разбиений окружности.

Разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ получается при помощи части орбиты точки x_0 : $\{x_i, 0 \leq q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n} .

Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0))$, $i \geq 0$. Тогда разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)}, 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)}, 0 \leq j < q_n\}$ [12].

При переходе от $\mathbb{P}_n(x_0)$ к $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ все «короткие» отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_n - 1$ сохраняются, а «длинные» отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \leq i < q_{n+1}$, разбиваются на пары отрезков:

$$\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \cup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}$$

Следующая теорема показывает, что длины отрезков динамического разбиения экспоненциально малы.

Теорема 1. Пусть $n > k > 0$. Отрезки $\Delta^{(n)} \in \mathbb{P}_n(x_0)$ и $\Delta^{(n-k)} \in \mathbb{P}_{n-k}(x_0)$ такие, что $\Delta^{(n)} \subset \Delta^{(n-k)}$. Тогда справедливы следующие оценки

$$\frac{|\Delta^{(n)}|}{|\Delta^{(n-k)}|} \leq C_1 \xi^k, \quad C_2 \xi_1^n \leq |\Delta^{(n)}|,$$

здесь $|\cdot|$ обозначает длину отрезка, а константы $C_1, C_2 > 0$ и $0 < \xi_1 < \xi < 1$ зависят только от T .

Если отображение T из класса гомеоморфизмов C^1 сопряженных отображений, то для любой точки $z_0 \in S^1 \setminus \mathbb{O}_T(x_0)$ справедливо неравенство Данжуа [2]

$$e^{-v} \leq (T^{q_n})'(z_0) \leq e^v,$$

где константа v обозначает вариацию $\ln T'$ по окружности S^1 . Используя неравенство Данжуа, легко можно показать, что любые два соседних (по расположению на окружности) отрезка $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{P}_{n-k}(x_0)$ являются соизмеримыми, т.е.

$$K^{-1} \leq \frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|} \leq K,$$

где константа $K > 1$ зависит только от T . Отсюда, путем стандартных рассуждений можно доказать утверждения Теоремы 1. Заметим, что неравенство А. Данжуа верно для кусочно-гладких гомеоморфизмов с конечным числом изломов, с ограниченной вариацией $\ln T'$ и иррациональным числом вращений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. – М.: Изд.фирмы “Физико-математическая литература”, 1995.

[2] Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343-366.

КРАЙНОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ НС-МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Махаммадалиев М. Т.

*Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан
e-mail: mmtmuxtor93@mail.ru*

Пусть $\tau^k = (V, L)$ - дерево Кэли порядка $k \geq 1$. Известно [1], что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$, соответственно. Пусть $d(x, y)$, $x, y \in V$ есть расстояние между вершинами x, y .

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Пусть $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ – конфигурация, то есть $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$, где $\sigma(x) = 1$ означает, что вершина x на дереве Кэли занятая, а $\sigma(x) = 0$ означает, что она свободная. Конфигурация σ называется допустимой, если $\sigma(x)\sigma(y) = 0$ для любых соседних $\langle x, y \rangle$ из V и обозначим множество таких конфигураций через Ω . Гамильтониан НС-модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in \mathbb{R}.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. например, [2]-[3]) что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1}, \quad (1)$$

где $\lambda = e^J > 0$ – параметр.

Пусть $\hat{G}_k$ является подгруппой группы G_k .

Определение 1. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$. G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными (ТИ).

Определение 2. Мера μ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ -периодической совокупности величин z .

Заметим, что мера μ является трансляционно-инвариантной (ТИ), если она соответствует G_k -периодической совокупности величин z .

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины в G_k , т.е.

$$G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{четное число}\}.$$

Теперь дадим полное описание $G_k^{(2)}$ -периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка три. Они соответствуют совокупности величин

$$\begin{cases} z_x = z_1, \text{ если } x \in G_k^{(2)}, \\ z_x = z_2, \text{ если } x \in G_k \setminus G_k^{(2)} \end{cases}$$

Отсюда, в силу (1) имеем

$$z_1 = \frac{1}{(1 + \lambda z_2)^k}, \quad z_2 = \frac{1}{(1 + \lambda z_1)^k}. \quad (2)$$

Теорема 1. [4] Для НС модели при $\lambda \leq \lambda_{cr} = (k-1)^{-1} \left(\frac{k}{k-1} \right)^k$ существует ровно одна $G_k^{(2)}$ -периодическая мера Гиббса μ_0 , которая совпадает с единственной ТИМГ и при $\lambda > \lambda_{cr}$ существуют ровно три $G_k^{(2)}$ -

периодические меры Гиббса μ_0, μ_1, μ_2 , где меры μ_1 и μ_2 являются $G_k^{(2)}$ -периодическими (не ТИ).

При изучении крайности нам необходимы явные виды решений, соответствующих мерам μ_1 и μ_2 .

Следующая теорема дает полное описание всех $G_k^{(2)}$ -периодических (не ТИ) мер Гиббса при $k=3$.

Теорема 2. Пусть $k=3$. Тогда для НС-модели при $\lambda > \frac{27}{16}$ существуют ровно две $G_k^{(2)}$ -периодические (не ТИ) меры Гиббса μ_1 и μ_2 , соответствующие решениям (z_1, z_2) и (z_2, z_1) уравнения (2), где

$$z_1 = \left(\frac{\lambda a^2 - \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} \right)^3, z_2 = \left(\frac{\lambda a^2 + \sqrt{\lambda^2 a^4 - 4\lambda a}}{2\lambda a} \right)^3,$$

$$a = \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{12\sqrt{12\lambda + 81} + 8\lambda + 108}{\lambda}} + \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\lambda}{12\sqrt{12\lambda + 81} + 8\lambda + 108}} + \frac{1}{3}.$$

Теорема 3. Пусть $k=3$. Тогда для НС-модели $G_k^{(2)}$ -периодические меры Гиббса μ_1 и μ_2 являются крайними в области их существования.

Литература

- [1] Ганиходжаев Н.Н., Розиков У.А., ТМФ, 111: 1, 1997, 109-117.
- [2] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. 1992.
- [3] Rozikov U. A., Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., 2013.
- [4] Suhov Yu.M., Rozikov U.A, Queueing Systems, 46, 2004, p.197-212.

М-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В МАТРИЧНОМ ШАРЕ

Нарекеев Б.М., Мырзанова Д.Е.

Нукусский государственный педагогический институт имени

Ажинияза

e-mail: ¹bazarbayn2127@gmail.com, ²dilaramm2127@gmail.com

Задачи Дирихле для М-гармонических функций в классических областях изучались в [1] и в единичном шаре из C^n - в [2].

Пусть $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ - вектор, составленный из квадратных матриц $Z_j, j=1, 2, \dots, n$ порядка m , рассматриваемых над полем комплексных чисел C . Можно считать, что Z - элемент пространства C^{nm^2} . Определим матричное «скалярное» произведение: $\langle Z, W \rangle = Z_1 W_1^* + Z_2 W_2^* + \dots + Z_n W_n^*$, где W_j^* есть матрица сопряженная и транспонированная для матрицы W_j .

Рассмотрим в пространстве C^{nm^2} область B :

$$B = \{Z : E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle > 0\}$$

($E^{(m)}$ - единичная матрица порядка m), которая называется матричным шаром. Остов (граница Шилова) этой области есть многообразие вида $S = \{Z : \langle Z, Z \rangle = E^{(m)}\}$, которое имеет вещественную размерность $2nm^2 - m^2$.

Теперь следуя Хуа Ло-куну [1] определим в C^{nm^2} дифференциальный

оператор $\partial_z = (\partial_{z_1}, \partial_{z_2}, \dots, \partial_{z_n})$, где $\partial_{z_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(z_j)_{11}}, \dots, \frac{\partial}{\partial(z_j)_{1m}} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial(z_j)_{m1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial(z_j)_{mm}} \end{pmatrix}, j=1, 2, \dots, n$ и

ПОЛОЖИМ

$$\tilde{\Delta} = Sp \left\{ (E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle) \bar{\partial}_z \cdot (E^{(mn)} - Z * Z) \partial'_z \right\} = \sum_{i,j=1}^n Sp \left\{ (E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle) \bar{\partial}_{z_i} \cdot (E^{(mn)} \delta_{i,j} - Z_i^* Z_j) \partial'_{z_j} \right\}$$

Можно показать, что оператор $\tilde{\Delta}$ инвариантен относительно автоморфизмов B и при $m=1$ он есть инвариантный лапласиан для единичного шара из C^n [2], а при $n=1$ инвариантный лапласиан для обобщенного единичного круга из $C[m, m]$ [1].

Определение. Элементы пространства Ω всех функций $f \in C^2(B)$, удовлетворяющих уравнению $\tilde{\Delta}f = 0$, будем называть М-гармоническими функциями.

Теорема [3]. Если $f(Z) \in A(B)$, то справедлива формула Пуассона

$$f(Z) = \int_S f(U) P(Z, U) d\sigma(U)$$

где $P(Z, U) = \left[\frac{\det(E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle)}{\left| \det(E^{(m)} - \langle Z, Z \rangle) \right|^2} \right]^{mn}$ -ядро Пуассона, $A(B)$ -пространства

функций, голоморфных в B и непрерывных на замыкании шара $\bar{B}$.

Теорема 1. Ядро Пуассона $P(Z, U)$ (при фиксированном U) является М-гармонической функцией в B .

Теорема 2. Пусть $\phi \in C(S)$ и функция f определена в B так, что $f = \phi$ на S и $f(Z) = \int_S \phi(U) P(Z, U) d\sigma(U)$ в B . Тогда $f \in C(\bar{B})$ и $\|f\|_\infty = \|\phi\|_\infty$.

Литература

[1] Хуа Ло-Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных. М. Мир, 1959. 164с.

[2] Рудин У. Теория функций в единичном шаре из C^n . М. Мир, 1984. 456 с.

[3] Косбергенов С. Голоморфные автоморфизмы и интеграл Бергмана для матричного шара // Докл. АН РУз. 1998. № 1. С. 7.

АНАЛОГ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА ДЛЯ $A(z)$ – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Неъматиллаева М. Д.

Национальный университет Узбекистана

e-mail: muhayyo.rn@gmail.com

Решения уравнения Бельтрами:

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

непосредственно связано с квазиконформными отображениями (см. [1], [2]). В общем случае относительно функции $A(z)$ предполагается, что она измерима и $|A(z)| \leq C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. Решения уравнения (1) обычно называют $A(z)$ – *аналитическими* функциями.

Наиболее интересен случай, когда $A(z)$ – *антианалитическая* функция, $\partial A = 0$, $|A(z)| \leq C < 1$, $\forall z \in D$. Тогда согласно (1) класс $A(z)$ – *аналитических* функций $f \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f = 0$. Так как антианалитическая функция бесконечно гладкая, то $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ (см. [2]).

Данная работа посвящена изучению аналогов теоремы Вейерштрасса для $A(z)$ – *аналитических* функций в выпуклых областях, когда $A(z)$ – *антианалитическая* функция. Требование условия выпуклости области обусловлено тем, что для не выпуклых областей может не существовать нужное ядро интегральной формулы, которое участвует в доказательстве основных результатов. Для *аналитических* функций факторизации Вейерштрасса хорошо изучены (см. [3]).

Приведем некоторые факты из теории $A(z)$ – *аналитических* функций, необходимые нам ниже. Рассмотрим интеграл

$$\psi(z, \xi) := z - \xi + \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau \in O_A(D),$$

где $\gamma(\xi, z)$ – гладкая кривая, соединяющая точек $\xi, z \in D$. Если область D – односвязная, то интеграл $I(z) = \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$ не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z) = \bar{A}(z)$. Функция

$\psi(z, \xi)$ для выпуклых областей имеет единственный ноль в точке $z = \xi$. В частности, множество

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D: \left| \psi(z, \xi) \right| = \left| z - \xi + \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau \right| < r \right\}$$

представляет собой открытое связное множество в D . Для достаточно маленьких $r > 0$ оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ . Это множество называется $A(z)$ -лемнискатой, с центром в точке ξ и обозначается как $L(\xi, r)$.

Рассмотрим ядро

$$K(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - \xi + \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}. \quad (2)$$

Теорема 1 (см. [4],[6]) (Аналог формула Коши). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область и $G \subset\subset D$ – произвольная компактная подобласть, с кусочно-гладкой границей ∂G . Тогда для любой функции $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$ имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{z - \xi + \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} (d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}), \quad z \in G. \quad (3)$$

Обобщённая теорема Вейерштрасса для $A(z)$ – аналитических функций. Основным результатом работы является

Теорема 2. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область и $G \subset\subset D$ – произвольная компактная подобласть. Тогда, какова бы ни была последовательность точек $a_n \in G$, не имеющая предельных точек в G , существует $A(z)$ – аналитическая в G функция f , которая имеет нули во всех точках a_n и только в этих точках.

Следствие. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область и $G \subset\subset D$ – произвольная компактная односвязная подобласть. Тогда, любая функция $f(z) \in O_A(G)$ допускает факторизацию

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_n \frac{\psi(z, a_n)}{\psi(z, b_n)} e^{\sum_{k=1}^{p_n} \frac{\psi^k(b_n, a_n)}{k\psi^k(z, b_n)}}, \quad (4)$$

где $\{a_n\}$ – совокупность (конечная или счетная) нулей функции $f(z) \in O_A(G)$, p_n, b_n – величины, определенные в доказательстве теоремы 2, а $g(z)$ – некоторая $A(z)$ – аналитическая в G функция. Отметим, что если $\{a_n\}$ – конечное, то представление (4) получается очень простое,

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_n \psi(z, a_n).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings. Vol.133. Toronto-New York-London (1966).
- [2] Vekua I.N. Generalized analytic functions. M: "Nauka". Vol. 512p (1988).
- [3] Koosis P. Introduction to H^p spaces. Cambridge University, London Math Society Lecture Note Series 40, 364 p (1960).
- [4] Jabborov N.M., Otaboyev T.U. An analogue of the Cauchy integral formula for A-analytic functions. Uzbek Mathematical Journal. 2 no. 4, p. 50-59 (2016)
- [5] Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A-analytic functions, J. Siberian Fed. Univ., Math. & Physics, 2016, Vol. 9, №3, pp.374-383.
- [6] Shabat B.V. Introduction to complex analysis. part 1, M. "NAUKA". Vol.336 p (1985).
- [7] Privalov I.I. Boundary properties of analytic functions Moscow. Vol.336c (1959).

КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Пренов Б. Б.

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

e-mail: prenov@mail.ru

Обозначим $\mathbb{R}_+^{n+1}$ верхнее полупространство. Оно состоит из точек (x, t) таких, что $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Его границей является пространство $\mathbb{R}^n$. Введем ядро Пуассона для полупространства

$$P(x, t, y) = c_n \frac{t}{(|x - y|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$. В случае шара в $\mathbb{R}^n$ см. [1].

Обозначим оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $\Delta = \Delta_{n,t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, а оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ через $\Delta_x = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ потенциалы $(-\partial_y)^\beta P(x, t, y_0)$ есть гармонические функции в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, равные нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$. Использование гиперфункций позволяет отказаться от жестких условий конечности порядка роста вблизи

$\mathbb{R}^n$ [2], [3]. Напомним, что любая гармоническая функция u в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ имеет граничное значение u_0 на $\mathbb{R}^n$, которое является гиперфункцией (аналитическим функционалом в случае компактного носителя). Более того, продолжение u в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ может быть дано по аналитическому функционалу u_0 формулой Пуассона $u(x) = \langle u_0, P(x, \cdot) \rangle$ для всех $x \in B$. Обратно, для данного аналитического функционала u_0 на $\mathbb{R}^n$ функция $u(x) = \langle u_0, P(x, \cdot) \rangle$ является гармонической в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, и ее предельные значения на $\mathbb{R}^n$ совпадают с u_0 [4].

Лемма. Пусть u_0 есть аналитический функционал на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$ и $u_{0,R}$ - любое продолжение u_0 до аналитического функционала на всем $\mathbb{R}^n$. Тогда любая гармоническая функция u в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, равная u_0 на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$, имеет вид

$$u(x, t) = \langle u_{0,R}, P(x, t, \cdot) \rangle + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}} c_\beta (-\partial_{y'})^\beta P(x, t, y_0), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

где $(c_\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}}$ - последовательность комплексных чисел таких, что

$$\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \sqrt[|\beta|]{|\beta! c_\beta|} = 0 \quad (1)$$

Мы напомним, что любая гиперфункция u_0 на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$ может быть продолжена до гиперфункции на S (см., например, [4].

Заметим, что условие (1) на коэффициенты гарантирует, что ряд в правой части (1) сходится равномерно по (x, t) на компактных подмножествах U в $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Это следует из действительной аналитичности ядра Пуассона $P(x, t, y)$ по $(x, t, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \times U$.

Пусть, $\{Y_{k,l}(z)\}$ есть множество однородных гармонических полиномов в $\mathbb{R}^n$, сужения которых на единичную сферу S образуют ортонормальный базис в $L^2(S)$ [5], [6].

Теорема. Пусть u_0 есть аналитический функционал на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$ и $u_{0,R}$ - любое продолжение u_0 как аналитического функционала на все $\mathbb{R}^n$. Тогда каждая гармоническая функция U на $\mathbb{R}_+^{n+1}$, равная u_0 на $\mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}$, имеет вид

$$u(x, t) = \langle u_{0,R}, P(x, t, \cdot) \rangle + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_j(x - y_0)}{(|x - y_0|^2 + t^2)^j} P(x, t, y_0),$$

где $\{h_j(z)\}_{j=0,1,\dots}$ последовательность однородных гармонических полиномов степени j в $\mathbb{R}^n$, которая однозначно определяется.

Список литературы

[1] B. Prenov, N. Tarkhanov, Kernel-Spikes of Singular Problems, Comm. Partial Diff. Eq., **28**(2003), №3,4 505-516.

[2] Кытманов А. М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.

[3] Ройтберг Я.А. О граничных значениях обобщенных решений эллиптических уравнений// Мат. сб. 1971. Т. 86, с 2. С. 248–267.

[4] Sato M., Kawai T., Kashiwara M. Hyperfunctions and pseudodifferential equations// Springer Lecture Notes in Math. 1973. V. 287. P. 265–529.

[5] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

[6] Stein E.M., Weiss G. Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Univ. Press: Princeton, 1971.

МАТРИЧНЫЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛ БИШОПА В ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Сапарбоева С.Ш., Эрматова Г.М

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: saparbayerasurayyo1550@gmail.com

В теории функции одной комплексной переменной интегральная формула Коши является универсальной формулой для любых областей на комплексной плоскости, ядро которой голоморфно и не зависит от вида области, а интеграл вычисляется по всей границе области. Это формула имеет разнообразные и важные применения.

В многомерном комплексном анализе есть несколько интегральных представлений, но у них нет универсальности, или голоморфности, которые характерны для интегральной формулы Коши. Интегральные представления, которые справедливы для любых ограниченных областей, имеют не голоморфные ядра, а известные интегральные представления с голоморфным ядром не пригодны для любых областей, т.е. нет универсальности, причем интеграл вычисляется не по всей границе области.

Напомним, что по теореме Хеффера для некоторой окрестности U полиэдра Вейля Π существуют такие функции $P_v^i(\xi, z) \in \mathcal{O}(U \times U)$, что при всех $(\xi, z) \in U \times U$

$$W_j(\xi) - W_j(z) = \sum_{v=1}^n (\xi_v - z_v) P_v^i(\xi, z), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Обозначим через $H(\xi, z)$ определитель $\det \|P_v^i(\xi, z)\|$.

Теорема 1 (Вейль [1]). Пусть Π – область Вейля (см. определение 1.1.3), определяемая областями D_i с гладкими границами. Тогда любую функцию $f \in \mathcal{O}_C(\Pi)$ в любой точке $z \in \Pi$ можно представить формулой

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 \dots i_n} \int_{\sigma_{i_1 \dots i_n}} \frac{f(\xi)}{\prod_{v=1}^n \{W_{i_v}(\xi) - W_{i_v}(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^{i_1} & \dots & P_n^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{i_n} & \dots & P_n^{i_n} \end{vmatrix} d\xi, \quad (2)$$

где суммирование распространяется на все упорядоченные наборы индексов $(1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N)$, определяющие ребра остова области, P_v^i – коэффициенты Хеффера и $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$; ребра ориентированы условием, что все ∂D_i проходятся в положительном направлении.

Интегрирование в формуле Вейля происходит по остову $\Delta(\sigma)$ области Вейля σ . Поэтому всякая функция $f(z)$, голоморфная в замыкании области Вейля σ , полностью определяется своими значениями на остове $\Delta(\sigma)$.

Если N равно n – размерности пространства $\mathbb{C}^n$, то аналитический полиэдр Π называется *специальным*.

Теорема 2 ([52]). Для любой функции h голоморфной в замыкании специального аналитического полиэдра $\Pi = \{z \in G: |f_j(z)| < r_j, j=1, \dots, n\}$ имеет место интегральное представление

$$h(z) = (2\pi i)^{-n} \int_{\Gamma} \frac{h(\xi) H(\xi, z) d\xi}{f(\xi) - f(z)}, \quad z \in \Pi \quad (3)$$

где $\Gamma = \{z \in \overline{\Pi}: |f_j(z)| = r_j, j=1, \dots, n\}$ – остов полиэдра Π ,

$$f(\xi) - f(z) = \prod_{j=1}^n [f_j(\xi) - f_j(z)].$$

Рассмотрим еще одну интегральную формулу, которая называется **интегральной формулой Бишопы**. Эта формула верна для класса мероморфных функций в специальном полиэдре [2].

В начале найдём интегральное представление для следа мероморфной функции в матричном полиэдре $M_{f,r}$.

Пусть $f: D \rightarrow G$ — голоморфное отображение конечного типа области $D \subset \tilde{\mathbb{C}}_z[n \times n]$ в $G \subset \tilde{\mathbb{C}}_w[n \times n]$ и $W^0 \in G$ — произвольная точка. Рассмотрим классическую область второго типа $M_r(W^0)$ в G с центром в точке W^0

$$M_r(W^0) = \left\{ W: r^2 I - (W - W^0)(\overline{W - W^0}) > 0 \right\} \subseteq G.$$

Теорема 3. Пусть $H(Z)$ — голоморфна в D . Тогда для следа $[Tr H](W)$ в области $M_r(W^0)$ верна интегральная формула

$$[Tr H](W) = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{H df(Z)}{\det^{\frac{n+1}{2}}(f(Z) - W)}, \quad (4)$$

где $\Gamma_{f,r} = \{Z \in D: f(Z)\overline{f(Z)} = r^2 I\}$, постоянное c_n выбрано по условию

$$c_n \int_{\Gamma_{f,1}} \frac{df(Z)}{\det^{\frac{n+1}{2}}(f(Z))} = 1.$$

В тезисе проводится следующую формулу, которая является аналогом формулы Бишопы.

Теорема 4. Если функция $h(Z) \in \mathcal{O}(M_{f,r}) \cap C(\overline{M}_{f,r})$, $Z \in M_{f,r}$ и в этой точке якобиан $J_f(Z) \neq 0$, то для мероморфной функции h/J_f справедливо интегральное представление

$$\frac{h(Z)}{J_f(Z)} = c_n \int_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(X) \Psi(Z, X) \bigwedge_{\substack{i=1 \\ j \leq n}}^j dx_{ij}}{\Psi(Z, Z) \det^{\frac{n+1}{2}}(f(X) - f(Z))}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Айзенберг Л.А, Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе* – Наука, Новосибирск, 1979, 366с.

[2] Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применения.* –Новосибирск: Наука, 1988. –240 с.

О ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ НС МОДЕЛЕЙ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Умирзакова К. О.

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан
e-mail: kamola-0983@mail.ru

Пусть $\tau^k = (V, L)$ есть дерево Кэли порядка $k \geq 2$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$ на дереве Кэли это количество ребер кратчайшей пути, соединяющей вершины x, y . Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{j=0}^n W_j, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ обозначим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. Множество $S(x)$ называется множеством прямых потомков вершины x .

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с тремя состояниями. В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \{0, 1, 2\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2$ означают, что вершина x «занята», а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x «вакантна». Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x), x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в $\Phi = \{0, 1, 2\}$. Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω . Аналогичным образом можно определить конфигурации в V_n , и множество всех конфигураций в V_n обозначается как Ω_{V_n} .

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G . Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой ближайшей пары соседей x, y из V (из V_n). Обозначим множество G -допустимых конфигураций через Ω^G ($\Omega_{V_n}^G$).

Множество активности для графа G есть функция $\lambda: G \rightarrow R_+$. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0, 1, 2\}$ называется ее “активностью” (см. [3]).

Для данных G и λ определим гамильтониан G -НС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, \quad \text{если } \sigma \in \Omega^G.$$

Определение 1. [3] Граф называется плодородным, если существует набор активности λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

В работе [3] выделены четыре типа плодородных графов с вершинами 0, 1, 2. Рассмотрим один из них $G = \text{петля}: \{0, 0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 1\}, \{2, 2\}$.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$ положим

$$\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \sigma_n(x)$$

число занятых вершин в V_n .

Пусть $z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}) \in R_+^2$ векторзначная функция на V . Для $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}^G$, определяемую как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma_n(x), x}. \quad (1)$$

Здесь Z_n – нормирующий делитель:

$$Z_n = \sum_{\varphi_n \in \Omega_{V_n}} \lambda^{\# \varphi_n} \prod_{x \in W_n} z_{\varphi_n(x), x}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных мер $\mu^{(n)}$ является согласованной, если $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}), \quad (2)$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega, \mathbf{B})$ такая, что для всех $\forall n \in N$ и $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$

$$\mu(\{\sigma \in \Omega: \sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$$

где $\mathbf{B}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Ω^G .

Определение 2. Мера μ , определенная формулой (1) с условием согласованности (2), называется $(G-)$ НС – мерой Гиббса с $\lambda > 0$, соответствующей функции $z : x \in V \setminus \{x_0\} \mapsto z_x$.

В этой работе мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и изучим трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G , обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ матрицу смежности G , т.е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases}$$

В следующей теореме сформулировано условие на z_x , гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

Теорема 1. [4] Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (1), согласованы тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z_{1,y} + a_{12}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, i = 1, 2 \quad (3)$$

где $z'_{i,x} = \frac{\lambda z_{i,x}}{z_{0,x}}$, $i = 1, 2$. Здесь мы полагаем, что $z_{0,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$, $i = 1, 2$.

Тогда в силу теоремы 1 существует единственная $(G-)$ НС – мерой Гиббса μ тогда и только тогда, когда для любых функций $z : x \in V \mapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ выполняется равенство

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10} + a_{11}z_{1,y} + a_{12}z_{2,y}}{a_{00} + a_{01}z_{1,y} + a_{02}z_{2,y}}, i = 1, 2 \quad (4)$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения, в которых $z_x = z \in R_+^2, x \neq x_0$.

Случай $G = \text{петля}$. В этом случае предполагая $z_x = z$, из (4) получим ледующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \lambda \left(\frac{1 + z_1}{1 + z_1 + z_2} \right)^k, \\ z_2 = \lambda \left(\frac{1 + z_2}{1 + z_1 + z_2} \right)^k. \end{cases} \quad (5)$$

В работе [5] известны следующие теорема.

Теорема 2. Пусть $k > 3$ и $\lambda_{cr} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$. Тогда для НС-модели в случае $G = \text{петля}$. При $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существуют ровно одна ТИМГ, при $\lambda > \lambda_{cr}$ существует не менее трех ТИМГ.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $k = 4$ и $\lambda_{cr} = \frac{625}{768}$. Тогда для НС-модели в случае $G = \text{петля}$ При $\lambda \leq \lambda_{cr}$ существуют ровно одна ТИМГ, при $\lambda > \lambda_{cr}$ существует не менее трех ТИМГ.

Список литературы

- [1] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992.
- [2] Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific. – 2013.
- [3] Brightwell G., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions. J. Combin. Theory Ser. B. – 1999. – 77, – P. 221–262.
- [4] Rozikov U. A., Shoyusupov Sh. A. Fertile HC models with three states on a Cayley tree, Theor. Math. Phys., 156(3), 2008, p. 1319–1330.
- [5] Rozikov U. A., Khakimov R. M. Gibbs measures for the fertile three-state hard core models on a Cayley tree, Queueing Systems. 81(1), 2015, p. 49–69.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРЕШЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ К МАКСИМАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

Усманов С. Э., Хазратова Г. А., Кувондииков Б. Б.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
e-mail: usmanov-salim@mail.ru

Введение и постановка задачи

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - гиперповерхность, $0 \leq \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Максимальным оператором, связанным с гиперповерхностью S , называется оператор, определяемый следующим соотношением:

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t f(y)|, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{A}_t f(y) := \int_S f(y - tx) \psi(x) dS(x) \quad (2)$$

- так называемый оператор усреднения и $dS(x)$ - поверхностная мера на S .

Говорят, что максимальный оператор $\mathcal{M}$ ограничен в пространстве L^p (или L^p -ограничен), если существует положительное число C_p такое, что

для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ выполняется неравенство $\|\mathcal{M}f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}$, где $\|\cdot\|_{L^p}$ - естественная норма пространства L^p .

Для данной гиперповерхности S естественно вводится показатель ограниченности $p(S)$ оператора (1), т.е., $p(S)$ такое число, что для всех $p > p(S)$, максимальный оператор (1) ограничен в L^p .

Максимальные операторы вида (1) исследовались в работах И.М.Стейна, Дж.Бургена, И.А.Икромова, М.Кемпе, Д.Мюллера, первого автора [1-4] и других работах.

В этой работе рассмотрим сингулярные поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, определяемые следующими параметрическими уравнениями

$x_1(u_1, u_2) = u_1^{a_1} u_2^{a_2} g_1(u_1, u_2)$, $x_2(u_1, u_2) = u_1^{b_1} u_2^{b_2} g_2(u_1, u_2)$, $x_3(u_1, u_2) = r + u_1^{c_1} u_2^{c_2} g_3(u_1, u_2)$, (3) где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ - натуральные числа, r - вещественное число, отличное от нуля, $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ и $\{g_k(u_1, u_2)\}_{k=1}^3$ - вещественно аналитические функции.

Нужно отметить, что точки поверхности (3), лежащие в достаточно малой окрестности нуля вне координатных плоскостей являются неособыми точками, точки поверхности (3), лежащие на координатных плоскостях, являются особыми (сингулярными) точками.

Исследуем следующий оператор усреднения, определенный по соотношениями (2) и (3):

$$\mathcal{A}_t^\phi f(y) = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(y_1 - t u_1^{a_1} u_2^{a_2} g_1(u_1, u_2), y_2 - t u_1^{b_1} u_2^{b_2} g_2(u_1, u_2), y_3 - t(r + u_1^{c_1} u_2^{c_2} g_3(u_1, u_2))) \times \\ \times \psi_1(u_1, u_2) \sqrt{\phi(u_1, u_2)} du_1 du_2,$$

где $\phi(u_1, u_2) = EG - F^2$ - неотрицательная вещественно - аналитическая функция, E, G, F являются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности S . Соответствующий максимальный оператор определяется соотношением:

$$\mathcal{M}^\phi f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^\phi f(y)|, y \in \mathbb{R}^3.$$

Введем следующие обозначения: $B_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $B_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$,

$$p'(S) = \max \left\{ \frac{c_1}{a_1 + b_1}, \frac{c_2}{a_2 + b_2}, \frac{c_1 + s_1 c_2}{a_1 + b_1 + s_1(a_2 + b_2)}, \frac{c_1 + s_2 c_2}{a_1 + b_1 + s_2(a_2 + b_2)}, \frac{c_1 + s_3 c_2}{a_1 + b_1 + s_3(a_2 + b_2)} \right\}, \\ s_1 = \frac{n_1 - m_1}{m_2 - n_2}, s_2 = \frac{l_1 - m_1}{m_2 - l_2}, s_3 = \frac{n_1 - l_1}{l_2 - n_2}.$$

Вычисляя значения $EG - F^2$ в точке (u_1, u_2) , получаем равенство:

$$\phi(u_1, u_2) := u_1^{m_1} u_2^{m_2} h_1^2(u_1, u_2) + u_1^{n_1} u_2^{n_2} h_2^2(u_1, u_2) + u_1^{l_1} u_2^{l_2} h_3^2(u_1, u_2),$$

где $m_i = 2(a_i + b_i - 1)$, $n_i = 2(a_i + c_i - 1)$, $l_i = 2(b_i + c_i - 1)$, $i = 1, 2, 3$. $h_i(u_1, u_2)$ ($i = 1, 2, 3$) - некоторые вещественно аналитические функции.

Основной целью этой работы является решением особенности функции $\varphi(u_1, u_2)$ в точке $(0,0)$ и применить его к исследованию проблемы ограниченности максимального оператора $M^\phi f$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^3)$ в малой окрестности точки $(0,0,r) \in \mathbb{R}^3$, т.е. в неособых точках поверхности (3).

Основные результаты

Лемма. Если $\varphi(u_1, u_2), h_i(u_1, u_2) (i=1,2,3)$ - вещественно аналитические функции в начале координат $\mathbb{R}^2$ и $B_1 B_2 B_3 \neq 0$, то в достаточно малой окрестности начала координат $\mathbb{R}^2$ функция $\varphi(u_1, u_2)$ представляется в виде $\varphi(u_1, u_2) = u_1^{k_1} u_2^{k_2} \tilde{\varphi}(u_1, u_2)$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}_+$, $\tilde{\varphi}(u_1, u_2)$ - дробно-степенно вещественно аналитическая функция и $\tilde{\varphi}(0,0) \neq 0$.

Теорема. Пусть $\{g_i(u_1, u_2)\}_{i=1}^3$ - вещественно аналитические функции в начале координат $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условиям $g_i(0,0) \neq 0$ и $B_1 B_2 B_3 \neq 0$. Тогда существует окрестность U начала координат в $\mathbb{R}^2$, такая, что для любой функции $\psi_1 \in C_0^\infty(U)$ максимальный оператор $M^\phi f$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^3)$ при $p > \max\{p'(S), 2\}$. Более того, если $\psi_1(0,0) > 0$ и $p'(S) > 2$, то максимальный оператор $M^\phi f$ не ограничен в $L^p(\mathbb{R}^3)$ при $2 < p \leq p'(S)$.

Литература

- [1] Stein E.M. Maximal functions. Spherical means. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 73(7), 2174-2175, 1976.
- [2] Bourgain J. Averages in the plane convex curves and maximal operators. J. Anal. Math. 1986. V. 47. P. 69-85.
- [3] Ikromov I.A., Kempe M., Müller D. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in $\mathbb{R}^3$ and related problems of harmonic analysis. Acta Math. 204 (2010), 151-271.
- [4] Usmanov S.E. S. The boundedness of maximal operators associated with singular surfaces. Russ Math. Volume 65(2021), 73-83.

МНОГОМЕРНАЯ ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА МОРЕРА В КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ЧЕТВЕРТОГО ТИПА

Халкназаров А.М., Кутлымуратов Б.Ж.

Нукусский государственный педагогический институт

e-mail: axalqnazarov@mail.ru

Пусть $D = D_{IV}$ – классическая область четвертого типа, образованная n -мерными векторами $z = (z_1 \dots z_n)$, удовлетворяющими условиям

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1.$$

Комплексная размерность этой области равна n . Пусть S – граница Шилова для области D , которое состоит из векторов вида $e^{i\varphi}x$, где x – вещественный n -мерный вектор, удовлетворяющий условию $xx' = 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и многообразие $S = S_{IV}$ имеет вещественную размерность n .

Для любой функции f в D и для любого $\zeta \in S$ рассмотрим срез-функцию f_ζ в $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ следующего вида: $f_\zeta(t) = f(t\zeta)$. Это срез-функция даёт возможность связать некоторые n -мерные свойства функции f с одномерными свойствами f_ζ .

Зафиксируем точку $\lambda_0 \in S$ ($\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$) и рассмотрим следующее вложение диска Δ в область D

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^N : \zeta_j = t\lambda_j^0, j = 1, \dots, N, |t| < 1\}. \quad (1)$$

Граница T диска Δ при этом вложении перейдет в окружность, лежащую на остоле S . Если ψ – произвольный автоморфизм области D (т.е. биголоморфное отображение области D на себя), то множество вида (1) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на S .

Параметризуем многообразие S следующим образом

$$\zeta = t\lambda, t = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \lambda \in S',$$

если $\zeta \in S$. Многообразие S' определяется по разному для областей D разного типа. Для областей первого типа – это сфера ([2]).

Рассмотрим функцию $f \in L^p(S)$, $p \geq 1$. В этом случае срез-функции $f_\zeta \in L^p(\Delta)$ для почти всех $\zeta \in S$. Это как и выше легко вытекает из следующего факта [2] что элемент объема $d\mu$ многообразия S может быть записана в виде

$$d\mu = \frac{d\varphi}{2\pi} \wedge d\mu' = \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t} \wedge d\mu',$$

где $d\mu'$ – дифференциальная форма, определяющая положительную меру на S' .

Обозначим через Δ_ψ аналитический диск вида

$$\Delta_\psi = \{\zeta : \zeta = \psi(t\lambda_0), |t| < 1\},$$

где λ_0 – фиксированная точка из остола S , а ψ – автоморфизм области D . Тогда граница T_ψ этого аналитического диска лежит на S .

На остоле S транзитивно действует подгруппа автоморфизмов, оставляющих 0 неподвижной точкой. Мы их назовем унитарными преобразованиями. Тогда остов S инвариантен относительно унитарных преобразований.

Лемма. Автоморфизмы ψ области D можно представить в виде $\psi = \psi_A \circ \varphi_\lambda$, где ψ_A – фиксированный автоморфизм, переводящий точку $A \in D$ в 0 , φ_λ – унитарное преобразование для фиксированной $\lambda \in S$.

Если $f \in L^p(S)$, то из равенства

$$\int_S f(\psi(\zeta)) d\mu = \int_S f(W) d\mu(\psi^{-1}(\zeta)) = \int_S f(W) h(W) d\mu(W),$$

где $|h(\zeta)| \geq \delta > 0$, вытекает что, и функция $f(\psi(\zeta)) \in L^p(S)$.

Следующая основная теорема дает принцип голоморфного продолжения интегрируемых функций, удовлетворяющих условиям Морера на границе области.

Теорема. Если функция $f \in L^p(S)$, $p \geq 1$ удовлетворяет условию

$$\int_T f(\psi(t\lambda)) dt = 0 \quad (2)$$

для всех автоморфизмов $\psi = \psi_A$ и почти всех автоморфизмов $\psi = \varphi_\lambda$ области D , то функция f голоморфно продолжается в D до функции F класса $H^p(\bar{D})$.

Литература

[1] Аграновский М.Л., Вальский Р.Е. Максимальность инвариантных алгебр функций.// Сибирский математический журнал. Новосибирск, 1971. Т. 12, вып. 1. С. 3-12.

[2] Кытманов А.М., Никитина Т.Н. Аналогии формулы Карлемана для классических областей// Математические заметки. 1989. Т. 45, вып. 3. С. 87-93.

[3] Косбергенов С., Кытманов А.М., Мысливец С.Г. О граничной теореме Морера для классических областей.// Сибирский математический журнал, 1999. Т. 40, вып. 3. С. 595-604.

[4] Globevnik J., Stout E.L. Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables.// Duke Math. J. 1991. V.64, №3. P.571-615.

СВОЙСТВА m -ВЫПУКЛЫХ (m -cv) ФУНКЦИЙ

¹Шарипов Р.А., ²Исмоилов М.Б.

¹Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

²Национальный университет Узбекистана

e-mail: r.sharipov@urdu.uz, mukhiddin4449@gmail.com

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и $u(x) \in C^2(D)$. Матрица $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right)$ является

симметрической, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t \partial x_k}$. Поэтому после подходящего ортонормального преобразования она преобразуется в диагональную форму,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_j = \lambda_j(x) \in \mathbb{R}$ – собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right)$. Пусть $H^s(u) = H^s(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_s}$ – гессиан размерности s вектора собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Определение. Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$ называется m – выпуклой в $D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in m-cv(D)$, если ее вектор собственных значений $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ удовлетворяет условиям

$$m-cv \cap C^2(D) = \{H^s(\lambda(x)) \geq 0, \forall x \in D, s = 1, \dots, n-m+1\}.$$

Теория $m-cv$ функций является малоизученным и новым направлением теории вещественной геометрии. Однако, при $m=1$ этот класс $1-cv \cap C^2(D) = \{H_1(\lambda) \geq 0\} = \{\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$ совпадает с выпуклыми в $\mathbb{R}^n$ функциями. Класс выпуклых функций хорошо изучен в работах А.Александрова, И.Бакельмана, А.Погорелова, Н.Ивочкина, А.Артикбаева и др. При $m > 1$ этот класс изучен в серии работ Н.Трудингера, Х.Вонг и др.

Отметим, следующие свойства $m-cv$ функций.

1. $cv = 1-cv \subset 2-cv \subset \dots \subset m-cv \subset \dots \subset n-cv = sh$;
2. $u, v \in m-cv$, то $au + bv \in m-cv$ для любых $a, b \geq 0$;
3. если $\gamma(t)$ – выпуклая, возрастающая функция параметра $t \in \mathbb{R}$ и $u \in m-cv$, то $\gamma \circ u \in m-cv$;
4. предел равномерно сходящейся или убывающей последовательности $m-cv$ функций является $m-cv$;
- 5) максимум конечного числа $m-cv$ функций снова $m-cv$;
- 6) если $u \in m-cv$, то для любой гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ сужение $u|_{\Pi}$ тоже является $m-cv$ функцией на Π .

Следствие. Если $u \in m-cv$, то для любой плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathbb{R}} \Pi = m$, сужение $u|_{\Pi}$ является sh функцией, $u|_{\Pi} \in m-cv = sh$.

Литература

- [1] Aleksandrov A.D., Konvexe Polyeder. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
- [2] Bakelman I. Ya., Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1994
- [3] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, М., 1969.

[4] Артыкбаев А., Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве// Мат. сб., 119 (161):2 (10) (1982), 204–224

[5] Садуллаев А., Абдуллаев Б. Теория потенциалов в классе m – субгармонических функций.// Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, – Москва, 2012. – № 279, С. 166–192.

[6] Trudinger N.S. and Wang X. J., Hessian measures I, // Topol. Methods Non linear Anal.19 (1997), pp. 225-239

[7] Trudinger N.S., Weak solutions of Hessian equations, Comm. Partial Differential Equations// 22 (1997), pp. 1251-1261

[8] Ivochkina N.M., Trudinger N.S., Wang X.-J., The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations// Comm. Partial Difi. Eqns 29 (2004), pp. 219-235.

СВОЙСТВА ЯДРО ПУАССОНА КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЕЙ

Шерифбоев А.Ш., Курбанов К.С., Собиров У.М.

Ургенский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: sherifboyevalisher@gmail.com

Комплексно однородные ограниченные области с разных точек зрения представляют большой интерес. Это объясняется тем, что они являются сравнительно широким классом областей в $\mathbb{C}^n$, для которых удалось получить целый ряд содержательных, существенно многомерных результатов ([1], [2], [3] и т.д.).

Для удобства приводим следующие определения (см. напр. [2], [3]):

Определение 1. Если группа автоморфизмов $Aut(D)$, области $D \subset \mathbb{C}^n$ транзитивна, т. е., для любой пары точек $z_1, z_2 \in D$ существует такой автоморфизм $\varphi \in Aut(D)$, что $\varphi(z_1) = z_2$, то область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется однородной.

Определение 2. Ограниченная область $D \subset \mathbb{C}^n$ называется классической, если полная группа ее голоморфных автоморфизмов является классической группой Ли и транзитивна на ней.

Приведем некоторые определения и введем нужные нам обозначения. Под классической областью (по классификации Э.Картана) $\mathfrak{R}_k \subset \mathbb{C}^n, k = I, II, III, IV$ мы будем понимать неприводимую ограниченную симметрическую область многих комплексных переменных одного из следующих четырех типов (см напр [2], [4]):

$$\mathfrak{R}_I(m, n) = \{Z \in \mathbb{C}[m \times n] : I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0\},$$

$$\mathfrak{R}_{II}(m) = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = Z\},$$

$$\mathfrak{R}_{III}(m) = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \forall Z' = -Z\},$$

$$\mathfrak{R}_{IV}(n) = \{z \in \mathbb{C}^n : |\langle z, \bar{z} \rangle|^2 - 2|z|^2 + 1 > 0, |\langle z, \bar{z} \rangle| < 1\},$$

здесь $I^{(m)}$ – единичная матрица порядка m , $\bar{Z}'$ – матрица комплексно сопряженная с транспонированной матрицей Z' . ($H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, как обычно, что H положительно определена). Все эти области являются однородными симметричными выпуклыми полными круговыми областями с центром в O (O – нулевая матрица).

Пусть $\mathfrak{R}$ классическая область, а $\mathbb{X}$ ее остов, транзитивное относительно группы Γ_0 автоморфизмов $\mathfrak{R}$, оставляющих начало неподвижным. Тогда по теореме 1.3.7 существует ядро Коши для области $\mathfrak{R}$, и для любой функции $f(Z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, имеет место формула Коши. Полагая, в частности, $f(Z) = H(Z, \bar{W})g(Z)$, где $g(Z)$ – произвольная функция, голоморфная в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, имеем

$$H(Z, \bar{W})g(Z) = \int_{\mathbb{X}} H(Z, \bar{\xi})H(\xi, \bar{W})g(\xi)\dot{\xi}.$$

При $W = Z$ получаем формулу Пуассона

$$g(Z) = \int_{\mathbb{X}} P(Z, \xi)g(\xi)\dot{\xi},$$

где ядро

$$P(Z, \xi) = \frac{H(Z, \bar{\xi})H(\xi, \bar{Z})}{H(Z, \bar{Z})}$$

уже встречалось нам под названием ядра Пуассона области $\mathfrak{R}$.

В ядра Пуассона для классических областей $\mathfrak{R}$ имеет вид (см. [2]):

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathbb{X}_I)} \cdot \frac{[\det(I - ZZ^*)]^n}{[\det(I - ZU^*)]^{2n}},$$

где $U \in \mathbb{X}_I$. В частности, при $m = n$ можно также написать

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathbb{X}_I)} \cdot \frac{[\det(I - ZZ^*)]^n}{[\det(I - ZU^*)]^{2n}}$$

В тезисе проводятся свойства ядра Пуассона в классических областях первого типа. Справедливы следующие

Теорема 1. Пусть $Z \in \mathfrak{R}_I$. Тогда

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R})} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^n \leq P(Z, U) \leq \frac{1}{V(\mathfrak{R})} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1+r_k}{1-r_k} \right)^n.$$

для всех U в $\mathbb{X}_I$, где $Z = U_0 \Lambda V_0$, U_0 и V_0 унитарных матриц и $\Lambda = [r_1, \dots, r_n]$ – диагональная матрица с $0 \leq r_k < 1, k = 1, \dots, n$.

Литературы

[1] Хенкин Г.М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. –Т.7 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). –М.: 1985.– С.23–124.

[2] Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.– М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

[3] Худайбергенов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск. 2017.-292 с.

[4] Cartan E. Sur les domaines bornes homogenes de l'espace de n variables complexes, Abh. Math. Sern. Univ. Hamburg 11(1935), pp.116-162

СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНОГО ВЫЧЕТА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Эрматова Г.М., Сапарбоева С.Ш.

Ургенский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: gulimuzaffarqizi@gmail.com

Свойства локальных вычетов и их приложения исследованы в работах А.Пуанкаре [1], А.П.Южакова ([2]), А.К.Циха ([3]), Ф.Гриффитса [4], Б.А.Шоимкулова ([5-6]) и других.

Известно, что если $a \in \mathbb{C}$ изолированная особая точка голоморфной функции $g(z)$, то её вычет в точке a определяется интегралом, либо коэффициентом c_{-1} ряда Лорана в некоторой окрестности точки a :

$$\operatorname{res}_a(g) = (2\pi i)^{-1} \int_{|z-a|=\varepsilon} g(z) dz = c_{-1}.$$

Отметим, что для функции одного переменного с изолированной особой точкой соответствует однозначно определённый ряд Лорана. Для функций же многих переменных аналогичного утверждения нет [3].

Тем не менее существует класс мероморфных функций многих переменных, которым естественным образом сопоставляется определенный вычет (из нескольких возможных) в окрестности особой точки. Это так называемый класс локальных вычетов, ассоциированных с голоморфными отображениями.

Локальный вычет ассоциируется с голоморфным отображением $f = (f_1, \dots, f_n)$ из пространства $\mathbb{C}^n$ в себя, имеющим точку $a \in \mathbb{C}^n$ изолированным нулем. Тогда локальный вычет мероморфной функции $g = h / f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ определяется интегралом

$$\operatorname{res}_f(h) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_a} \frac{h dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdot \dots \cdot f_n(z)},$$

по вещественно n -мерному циклу

$$\Gamma_a = \Gamma_a^\varepsilon(f) = \left\{ z \in U_a : |f_j(z)| = \varepsilon_j, j = 1, \dots, n \right\},$$

где $\varepsilon_j \in R$ — достаточно малые положительные вещественные числа такие, что $\Gamma_a^\varepsilon \subseteq U_a$. Ориентация цепи Γ_a определяется условием $d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0$ [52].

Здесь мы получаем новое интегральное представление для локального вычета в одной специальной размерности $n = m^2$. В этой размерности ростки отображений $f = (f_1, \dots, f_{m^2}) : \mathbb{C}^{m^2} \rightarrow \mathbb{C}^{m^2}$ уместно интерпретировать в виде отображений

$$f = f(z) : \mathbb{C}[m \times m] \rightarrow \mathbb{C}[m \times m] \quad (1)$$

пространств $m \times m$ -матриц. Наше определение локального вычета использует ядро интегрального представления Хуа Локена для матричного круга в пространстве матриц, а обоснование эквивалентности этого определения с традиционным основано на схеме А.К. Циха [3].

Итак, пусть отображение (1) голоморфно в замкнутой окрестности $\overline{U}_a$ и имеет в точке $a \in \mathbb{C}[m \times m]$ изолированный нуль. Для нас переменные z и $f(z)$ — это матрицы $z = (z_{ij})$ и $f(z) = (f_{ij}(z_{ij}))$. Введем следующий m^2 -мерный цикл

$$\Gamma_{f,\varepsilon} = \{z \in U_a : f f^* = \varepsilon^2 I\},$$

где I — единичная $m \times m$ -матрица, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Ориентацию $\Gamma_{f,\varepsilon}$ зададим условием $\bigwedge_{i,j} d \arg f_{ij} \geq 0$.

Определение. Для ростка голоморфной функции $h : U_a \rightarrow \mathbb{C}$ и отображения (16.1) действие локального вычета в точке a введем по формуле

$$\text{res}_a^f(h) = C_m \int_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h dz}{\det^m f}, \quad (2)$$

где $dz = \bigwedge_{i,j} dz_{ij}$, а C_m выбрано условием

$$C_m \int_{zz^*=1} \frac{dz}{\det^m z} = 1,$$

$$\text{Фактически здесь } C_m = \frac{1!2! \dots (m-1)!}{(2\pi i)^{\frac{m(m+1)}{2}}}.$$

Мы будем также считать, что локальный вычет (2) сопоставлен дифференциальной форме $\omega = \frac{h \dot{z}}{\det^m f}$ и обозначать его через $\text{res}_a \omega$ (здесь $\dot{z} = C_m \bigwedge_{i,j} dz_{ij}$).

Поскольку мы доказали эквивалентность введенного выше локального вычета (2) с традиционным вычетом, мы можем переформулировать ряд свойств на языке вычета (2). Непосредственные доказательства этих свойств

для функций от матриц могут быть полезными в других вопросах, поэтому мы приводим полные обоснования соответствующих утверждений.

Теорема 1. Если $f: D \rightarrow \mathbb{C}[m \times m]$ голоморфное отображение в области $D \subset \mathbb{C}[m \times m]$ и множество

$$D_{f,r} = \{z \in D: f(z) f^*(z) < r^2 I\}$$

относительно компактно в D , то справедлива формула

$$\int_{\Gamma_{f,r}} \frac{J_f \dot{z}}{\det^m f} = N,$$

где J_f – якобиан отображения f , где N – число нулей (с учетом кратности) отображения f , лежащих в $D_{f,r}$.

Рассмотрим $\tilde{\mathbb{C}}[n \times n]$ — пространство $[n \times n]$ -симметрических матриц, элементы которых являются комплексными числами.

Пусть теперь дано отображение $f = f(Z): G \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}[n \times n]$, голоморфное в некоторой области $G \subset \tilde{\mathbb{C}}[n \times n]$.

Матричным полиэдрическим множеством, определённым голоморфным отображением $f: G \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}[n \times n]$, называется множество

$$f^{-1}(D_{2,r}) = \{Z \in G: r^2 I^{(n)} - f(Z) \overline{f(Z)} > 0, r > 0\},$$

если оно относительно компактно в G . т.е. $f^{-1}(D_{2,r}) \Subset G$. Связная компонента матричного полиэдрического множества $f^{-1}(D_{2,r})$ называется матричным полиэдром, обозначим его через $M_{f,r}$. Остов области $M_{f,r}$ определяется следующим образом:

$$\Gamma_{f,r} = \{Z \in G: f(Z) \overline{f(Z)} = r^2 I^{(n)}, r > 0\}.$$

В тезисе проводятся найдены аналог теоремы 1.

Литературы

[1] Poincaré H. Sur les résidues des intégrales doubles // Acta Math. — 1887. — № 9. — С. 321—380.

[2] Южаков А.П. О вычетах функций многих комплексных переменных. — «Изв. вузов. Математика», 1964, № 5, с. 149-164.

[3] Цих А.К. Многомерные вычеты и их применения. —Новосибирск: Наука, 1988. —240 с.

[4] Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, М., Мир, 1982. Т. 1, 496 с.

[5] Шаимкулов Б.А. Специальное интегральное представление для локального вычета //Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1192–1196.

[6] Шаимкулов Б.А. Об одном определении локального вычета//ДАН РУз. 2001. № 10-11. С. 3–5.

МНОЖЕСТВО МОЩНОСТИ БОЛЬШЕ КОНТИНУУМА

Эшниязов А.И., Хидирова Ш.Б.

Гулистанский государственный университет, Гулистан, Узбекистан

e-mail: eshniyozovabdumalik75@gmail.com

Определение 1. Говорят, что множество действительных чисел на интервале $(0, 1)$ имеет мощность континуума.

Определение 2. Множество, имеющее мощность континуум, называется континуальным множеством.

Лемма 1. Интервал $(0, a)$ имеет мощность континуума ($a > 0$).

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала $(0, 1)$ и элементами y интервала $(0, a)$ следующим образом: $y = ax$. Взаимная однозначность этого отображения и доказывает лемму.

Биективное отображение интервала $(0, 1)$ на произвольный (a, b) .

Лемма 2. Интервал (a, b) , где $b > a$, равномошен интервалу $(0, b - a)$.

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала $(0, b - a)$ и элементами y интервала (a, b) следующим образом: $y = x + a$. Взаимная однозначность этого отображения и доказывает лемму.

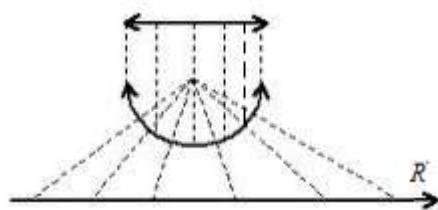
Следствие 1. Интервал (a, b) имеет мощность континуума.

Теорема 1. Множество действительных чисел имеет мощность континуума.

Доказательство. Для доказательства этого факта построим отображение между элементами x интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и элементами y множества всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$ следующим образом: $y = \operatorname{tg} x$. Взаимная однозначность этого отображения доказывает теорему.

Существуют ли множества, мощность которых больше континуума?

Можно попробовать взять в качестве такого множества плоскость, поскольку интуитивно точек на плоскости «намного больше», чем точек на прямой.



В декартовой системе координат каждая точка на плоскости задается парой действительных чисел—координат $(x; y)$. Но оказывается, что переход к множествам в

двумерном пространстве принципиально не может увеличить мощность. Об этом говорит следующая лемма.

Лемма 2. Множество точек квадрата

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$$

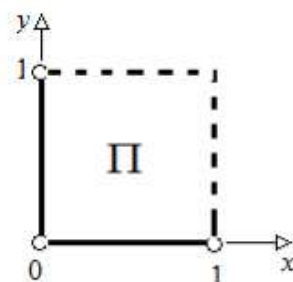
имеет мощность континуум.

Доказательство. Для доказательства установим взаимно—однозначное соответствие между точками $(x; y)$ квадрата Π , изображенного на рисунке, и точками z интервала $(0, 1)$. Поскольку x, y и z — действительные числа, то их можно однозначно представить в виде допустимых бесконечных десятичных дробей

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_i \dots, y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_i \dots, z = 0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_i \dots$$

Поставим в соответствие паре $(0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_i \dots; 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_i \dots) \in \Pi$ допустимую бесконечную десятичную дробь $0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots \alpha_i \beta_i \dots \in (0, 1)$; и наоборот, допустимой бесконечной десятичной дроби $0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_i \dots \in (0, 1)$ пару $(0, \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5 \dots; 0, \gamma_2 \gamma_4 \gamma_6 \dots) \in \Pi$. Очевидно, это соответствие является взаимно—однозначным, что и доказывает лемму.

С помощью этой леммы, повторяя те же рассуждения, что и в случае прямой, можно доказать, что плоскость имеет мощность континуума. Проведенные доказательства можно обобщить на случай любого конечномерного евклидова пространства (трехмерного, четырехмерного и т. п.). Таким образом, в конечномерных пространствах нет подмножеств мощности больше континуума.



Означает ли это, что множества мощности больше континуума не существует? Конечно, нет. Но искать такие множества нужно на другом пути, который открывается важным фактом о том, что ни одно множество не эквивалентно множеству его подмножеств.

Лемма 3. Любое множество не эквивалентно множеству его подмножеств.

Доказательство леммы [2].

Следствие 2. Множество всех подмножеств действительных чисел имеет мощность больше континуума.

Следствие 3. Не существует множества наибольшей мощности.

Всегда вместе с множеством можно рассмотреть множество его подмножеств, мощность которого будет больше мощности исходного множества.

Г. Кантор также доказал, что множество всех подмножеств счетного множества есть множество мощности континуума.

Но долгое время после Кантора математики занимались решением вопроса о том, существует ли множество мощности больше счетного и меньше континуума. Этот вопрос получил название континуум — гипотеза.

В XX веке, когда была построена аксиоматическая теория множеств, было установлено, что факт существования такого множества нельзя ни

доказать, ни опровергнуть, исходя из других аксиом теории множеств. Можно постулировать в виде дополнительной аксиомы как существование такого множества, так и его отсутствие. В любом случае мы получим логически непротиворечивую систему утверждений – разные варианты математической теории.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 648 с.

[2] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Учебник. – 3-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр. – М.: Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, 1997. – 624с.

СЕКЦИЯ №3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

ON THE CAUCHY PROBLEMS FOR A FRACTIONAL SUBDIFFUSION EQUATIONS

¹Ashurov R.R., ²Fayziev Yu.E., ²Baxriddinova N.A.

¹Institute of Mathematics, the Academy of Sciences of the Uzbekistan,

²National University of Uzbekistan,

e-mail: ashurovr@gmail.com, fayziev.yusuf@mail.ru

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot, \cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$ and $A: H \rightarrow H$ be an arbitrary unbounded positive self-adjoint operator in H . Suppose that A has a complete in H system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues λ_k . It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Let $C((a, b); H)$ stand for a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H .

Consider the following problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + A^a(D_t^\rho u(t)) + A^b u(t) = 0, & 0 < t \leq T; \\ u(+0) = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

where $\varphi \in H$, D_t^ρ – the Gerasimov-Caputo derivative of order ρ , $0 < \rho < 1$ [1]. These problems are also called *the forward problems*.

Definition 1. A function $u(t) \in C((0, T]; H)$ with the properties $D_t^\rho u(t)$, $A^a(D_t^\rho u(t))$, $A^b u(t) \in C((0, T]; H)$ and satisfying conditions (1) is called **the solution** of the Cauchy problem (1).

In this paper, we prove the existence and uniqueness of a solution to the direct problem (1).

Theorem 1. Let $0 < \rho < 1$.

1) If $b \leq a$ and $\varphi \in D(A^b)$, then problem (1) has a unique solution and this solution has the form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k E_{\rho, 1}(-\mu_k t^\rho) v_k, \quad (2)$$

where are φ_k – the Fourier coefficients of the function φ and $\mu_k = \frac{\lambda_k^b}{1 + \lambda_k^a}$.

2) If $b > a$ and $\varphi \in D(A^a)$, then problem (1) has a unique solution and this solution has the form (2).

References

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier (2006).

O'ZGARUVCHI KOEFFITSIYENTLI YUKLANGAN INTEGRAL OPERATORLI ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASI YECHIMINING MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI.

^{1,2}Baltayeva U. I., ¹Xasanov B. M.

¹Khorazm Mamun akademiyasi

²Urganch davlat universiteti

e-mail: umida_baltayeva@mail.ru, xasanovboburjon.1993@gmail.com

$u(x, t)$ funksiyani $(x, t) \in R_T^n$ sohada quyidagi tenglamadan aniqlash masalasini qaraymiz:

$$u_t - a(t)\Delta u = \lambda D_{0,t}^{-\alpha} u(x', t) + \int_0^t K(x, \tau) u(x, t - \tau) d\tau \quad (x, t) \in R_T^n, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in R^n, \quad (2)$$

bu yerda

$$D_{0,t}^{-\alpha} u(x', t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(x', \tau) d\tau \quad \alpha > 0,$$

$a(t) \in E := \{a(t) \in C^1[0, T], 0 < a_0 < a(t) \leq a_1 < \infty\}$, $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - Laplas operatori

$$\varphi(x) \in H^{l+2}(R^n), \varphi(x) \leq \varphi_0 = \text{const} > 0,$$

$$(\bar{R}_T^{n-1}) = \{(x', t) | x' \in R^{n-1}, 0 \leq t \leq T\}, l \in (0, 1), \lambda \in R.$$

Ushbu masalada o'rama ko'rinishidagi yadroni x o'zgaruvchiga ajralgan deb hisoblaymiz, ya'ni $K(x, t) = h(x_n)k(x', t)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, bu yerda $h(x_n) \in H^{l+2}(R)$, $k(x', t) \in H^{l, (l+2)/2}(\bar{R}_T^{n-1})$.

(1) integro-differensial tenglamadan $u(x, t)$ funksiyani (2) boshlang'ich shart orqali topish masalasiga Koshi masalasi deyiladi. Bunday masalalar teskari masalalar nazariyasida to'g'ri masala deb ataladi.

(1) va (2) Koshi masalasining yechimi Volterra tipidagi integral tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Buning uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$p(x, t) = \int_{R^n} \varphi(\xi) G(x - \xi, \theta(t) - \tau) d\xi + \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{R^n} F(\xi, \theta^{-1}(\tau)) G(x - \xi, \theta(t) - \tau) d\xi \quad (3)$$

(3) formula quyidagi o'zgaruvchan ko'effitsiyentli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasini yechimini ifodalaydi:

$$p_t - a(t)\Delta p = F(x, t), x \in R^n, t > 0$$

$$p(x, 0) = \varphi(x), x \in R^n.$$

(3) da $\theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$ va $\theta^{-1}(t)$ funksiya $\theta(t)$ funksiyaning teskari funksiyasidir.

$$G(x - \xi, \theta(t) - \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(\theta(t) - \tau)})^n} e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4(\theta(t)-\tau)}} \text{ esa } \frac{\partial}{\partial t} - a(t)\Delta,$$

o'zgaruvchan koeffitsiyentli differensial operatorining fundamental yechimi bo'lib, bu yerda

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}), d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n, |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

(3) formuladan foydalanib (1), (2) Koshi masalasini quyidagi ikkinchi tur Volterra integral tenglamasi ko'rinishida ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{R^n} \varphi(\xi) G(x - \xi, \theta(t) - \tau) d\xi + \\ & + \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{R^n} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} h(\xi_n) k(\xi', \alpha) u(\xi, \theta^{-1}(\tau) - \alpha) G(x - \xi, \theta(t) - \tau) d\xi d\alpha + \\ & + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{R^n} \int_0^{\theta^{-1}(\tau)} (\theta^{-1}(\tau) - \beta)^{\alpha-1} u(\xi', \beta) G(x - \xi, \theta(t) - \tau) d\beta d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x) \in H^{l+2}(R^n)$, $h(x_n) \in H^{l+2}(R)$, $k(x', t) \in H^{l, (l+2)/2}(\bar{R}_T^{n-1})$ va $a(t) \in E$ bo'lsin. U holda (4) integral tenglamaning $H^{l+2, (l+2)/2} \in (R_T^n)$ sinfga qarashli yagona $u(x, t)$ yechimi mavjud.

Adabiyotlar

[1] Islomov B, Baltaeva U.I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients. Electronic Journal of Differential Equations. 2015; 221(2015):1-10.

[2] Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal Conductivity // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. 2020, vol.

[3] Расулов Т.Х , Нуриддинов Ж.З , Хидиров У.Б Алгоритм решения задачи коши для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом журнал Наука, техника и образование 2020; 108(2020):77-80.

[4] Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., Uniqueness for a multidimensional kernel determination problem from a parabolic integro-differential equation // Международная научно-техническая конференция Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики, Воронеж, 7 - 9 декабря 2020 г. 4-7 ст.

[5] Baltaeva U.I, Xasanov B.M., The direct problem for the loaded heat dissipation equation with a variable coefficient, Journal of “Илм арчашмалари”, №4. 2022, -pp.3-7.

EXACT SOLUTIONS OF THE HARRY–DYM EQUATION WITH LOADED BY USING THE MODIFIED SIMPLE EQUATION METHOD

Esomurodova R.J., Yakubov Kh.E.

Urgench state university, Urgench, Uzbekistan

e-mail: esomurodova@bk.ru, yakubov0404@mail.ru

We apply the functional variable method to solve a loaded non-linear Harry–Dym equation.

Consider the following loaded nonlinear Harry–Dym equation

$$u_t = u^3 u_{xxx} + \gamma(t) u(0, t) u_x \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is an unknown function, $x \in R$, $t \geq 0$, $\gamma(t)$ - is the given real continuous function. This method consists of the following steps [1–5]:

Step 1. Consider a general form of nonlinear partial differential equation (PDE)

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2)$$

Assume that the solution is given by $u(x, t) = v(\xi)$ where $\xi(x, t) = x + kt$. Hence, we use the following changes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) &= -k \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial \xi}(\cdot) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cdot) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\cdot) \end{aligned} \quad (3)$$

and so on for other derivatives. Using (3) changes the PDE (2) to an ODE

$$Q(v, v_x, v_t, v_{xx}, v_{tt}, v_{xt}, \dots) = 0 \quad (4)$$

where $v = v(\xi)$ is an unknown function, Q is a polynomial in the variable v and its derivatives.

Step 2. We suppose that Eq. (4) has the following formal solution:

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^N A_i \left(\frac{F'}{F} \right)^i, \quad (5)$$

where A_i are arbitrary constants to be determined such that $A_N \neq 0$, while $F(\xi)$ is an unknown function to be determined later.

Step 3. We determine the positive integer N in (5) by balancing the highest order derivatives and the nonlinear terms in Eq. (4).

Step 4. We substitute (5) into (4), we calculate all the necessary derivatives $v', v'' \dots$ and then we account the function $F(\xi)$. As a result of this substitution, we get a polynomial of $\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}$ and its derivatives. In this polynomial, we equate with zero all the coefficients of it. This operation yields a system of equations which can be solved to find A_1 and $F(\xi)$. Consequently, we can get the exact solution of Eq.(2).

Conclusion.

In this paper, the modified simple equation method is applied successfully for solving the Harry–Dym equation with loaded. The results show that this method is efficient in finding the exact solutions of nonlinear differential equations.

References

- [1] Kudryashov NA, Loguinova NB. Be careful with the exp-function method. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2009;14: 1881–90.
- [2] Jawad AJM, Petkovic MD, Biswas A. Modified simple equation method for nonlinear evolution equations. Appl Math Comput 2010;217:869–77.
- [3] Zayed Elsayed ME. A note on the modified simple equation method applied to Sharma–Tasso–Olver equation. Appl Math Comput 2011;218:3962–4
- [4] N. Taghizadeh a, M. Mirzazadeh a,*, A. Samiei Paghaleh a, J. Vahidi. Exact solutions of nonlinear evolution the modified simple equation method. Ain Shams Engineering Journal (2012) 3, 321–325

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A BOUSSINESQ TYPE TIME-FRACTIONAL SUBDIFFUSION EQUATIONS

Fayziev Yu. E., Nosirova D., Maxmudova D.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: fayziev.yusuf@mail.ru, nosirova.erkinovna@mail.ru, dilnozik@gmail.com

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot, \cdot)$ and the norm $\|\cdot\|$ and $A: H \rightarrow H$ be an arbitrary unbounded positive selfadjoint operator in H . Suppose that A has a complete in H system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of positive eigenvalues λ_k . It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Let $C((a, b); H)$ stand for a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a, b)$ with values in H .

Let $1 < \rho < 2$. Consider the following problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(t) + D_t^\rho (Au(t)) + Au(t) = f, & 0 < t \leq T; \\ u(+0) = \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

where $\varphi, f \in H$, D_t^ρ – the Gerasimov-Caputo derivative of order ρ [1]. These problems are also called *the direct problems*.

Definition 1.1 A function $u(t) \in C((0, T]; H)$ with the properties $D_t^\rho u(t), D_t^\rho (Au(t)), Au(t) \in C((0, T); H)$ and satisfying conditions (1) is called **the solution** of the Cauchy problem (1).

In this paper, we prove the existence and uniqueness of a solution to the direct problem (1).

Note, if in case $0 < \rho < 1$ equation of the problem (1) is called the equation of the Barenblatt-Zhel'tov-Kachino [2].

References

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier (2006).
- [2] R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziyev, N. Kh. Khushvaktov, "Forward and inverse problems for the Barenblatt-Zhel'tov-Kochina type fractional equations," Lobachevskii journal of Mathematics, 5, 97–104 (2022).

INTEGRAL REPRESENTATION FOR HYPERGEOMETRIC FUNCTION OF THE MITTAG-LEFFLER TYPE $\bar{F}_A^{(3)}$

Hasanov A., Yuldashova Kh.

Mathematical Institute named after Romanovsky V.I

e-mail: anvarhasanov@yahoo.com, yuldashovahilola392@gmail.com

The Mittag-Leffler function has gained importance and popularity through its applications. When solving differential equations of fractional order and integral equations of fractional order. Also, the Mittag-Leffler function plays an important role in various fields of applied mathematics and engineering sciences, such as chemistry, biology, statistics, thermodynamics, mechanics, quantum physics, computer science, signal processing [1-6].

Consider the following three variable hypergeometric function

$$\begin{aligned} \bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) &= \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2, b_2, \beta_2, b_3, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3; c_2, \beta_3; c_3, \gamma_3; c_4, \alpha_4; c_5, \beta_4; c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x, y, z \right) = \\ &= \sum_{m, n, p=0}^{\infty} \frac{(a)_{\alpha_1 m + \beta_1 n + \gamma_1 p} (b_1)_{\alpha_2 m} (b_2)_{\beta_2 n} (b_3)_{\gamma_2 p}}{\Gamma(c_1 + \alpha_3 m) \Gamma(c_2 + \beta_3 n) \Gamma(c_3 + \gamma_3 p) \Gamma(c_4 + \alpha_4 m) \Gamma(c_5 + \beta_4 n) \Gamma(c_6 + \gamma_4 p)} \frac{x^m}{\Gamma(c_4 + \alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(c_5 + \beta_4 n)} \frac{z^p}{\Gamma(c_6 + \gamma_4 p)} \end{aligned} \quad (1)$$

where $\min\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\} > 0, \quad i = \overline{1, 4}$

For a generalized hypergeometric function of the Mittag-Leffler type $\bar{F}_A^{(3)}$, the following integral representations of the Euler type take place

$$\bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\mu - b_1)} \quad (2)$$

$$\times \int_0^1 \xi^{b_1-1} (1-\xi)^{\mu-b_1-1} \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \mu, \alpha_2, b_2, \beta_2, b_3, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3, c_2, \beta_3, c_3, \gamma_3, c_4, \alpha_4, c_5, \beta_4, c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x \xi^{\alpha_1}, y, z \right) d\xi, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} b_1 > 0,$$

$$\bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_2)\Gamma(\mu - b_2)} \quad (3)$$

$$\times \int_0^1 \xi^{b_2-1} (1-\xi)^{\mu-b_2-1} \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \mu, \alpha_2, \mu, \beta_2, b_3, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3, c_2, \beta_3, c_3, \gamma_3, c_4, \alpha_4, c_5, \beta_4, c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x, y \xi^{\beta_2}, z \right) d\xi, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} b_2 > 0,$$

$$\bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(b_3)\Gamma(\mu - b_3)} \quad (4)$$

$$\times \int_0^1 \xi^{b_3-1} (1-\xi)^{\mu-b_3-1} \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2, b_2, \beta_2, \mu, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3, c_2, \beta_3, c_3, \gamma_3, c_4, \alpha_4, c_5, \beta_4, c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x, y, z \xi^{\gamma_2} \right) d\xi, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} b_3 > 0,$$

$$\bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_3)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(b_3)\Gamma(\mu_1 - b_1)\Gamma(\mu_2 - b_2)\Gamma(\mu_3 - b_3)} \quad (5)$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \xi^{b_1-1} \eta^{b_2-1} \tau^{b_3-1} (1-\xi)^{\mu_1-b_1-1} (1-\eta)^{\mu_2-b_2-1} (1-\tau)^{\mu_3-b_3-1} \times$$

$$\times \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} a, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \mu_1, \alpha_2, \mu_2, \beta_2, \mu_3, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3, c_2, \beta_3, c_3, \gamma_3, c_4, \alpha_4, c_5, \beta_4, c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x \xi^{\alpha_1}, y \eta^{\beta_2}, z \tau^{\gamma_2} \right) d\xi d\eta d\tau$$

$$\operatorname{Re} \mu_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \mu_2 > \operatorname{Re} b_2 > 0, \quad \operatorname{Re} \mu_3 > \operatorname{Re} b_3 > 0,$$

$$\bar{F}_A^{(3)}(x, y, z) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(a)\Gamma(\mu - a)} \quad (6)$$

$$\times \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{\mu-a-1} \bar{F}_A^{(3)} \left(\begin{matrix} \mu, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; b_1, \alpha_2, b_2, \beta_2, b_3, \gamma_2; \\ c_1, \alpha_3, c_2, \beta_3, c_3, \gamma_3, c_4, \alpha_4, c_5, \beta_4, c_6, \gamma_4; \end{matrix} \middle| x \xi^{\alpha_1}, y \xi^{\beta_1}, z \xi^{\gamma_1} \right) d\xi, \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} a > 0.$$

This can be proved by substituting the integral representations for the series representation of the function $\bar{F}_A^{(3)}$ and considering that the series is absolutely convergent, by interchanging the signs of integral and series and using Euler's Beta and Gamma functions.

References

- [1] Mittag-Leffler GM. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(z)$. C R Acad Sci Paris. [1903](#);137:554–558.
- [2] Luchko Y. Initial boundary value problems for the generalized multiterm time fractional diffusion equation. J Math Anal Appl. [2011](#); 374: 538–548.
- [3] Li Z, Liu Y, Yamamoto M. Initial boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. Appl Math Comput. [2015](#); 257:381–397.

[4] Salim T.O. Some properties relating to the generalized Mittag–Leffler function. Adv Appl Math Anal. 2009; 4:21–30.

[5] Luchko Y, Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives. Acta Math Vietnam. 1999; 24:207–233.

[6] Gorenflo R, Kilbas A, Mainardi F, Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. 2nd edition: Springer-Verlag GmbH Germany, 2020.

[7] Srivastava H.M., Daoust Martha C. On Eulerian integrals associated with Kampe de Fieriet's function. Publications de L'institut Mathematique, Nouvelle serie, 1969, T. 9 (23), 199-202.

[8] Maged G. Bin-Saad, Anvar Hasanov and Michael Ruzhansky (2021), Some properties relating to the Mittag–Leffler function of two variables. Integral Transforms and Special Functions. 2022, 33(5), pp. 400–418.

MAXSUS KO'RINISHDAGI INTEGRAL CHEGARALANISHLI QUVISH VA QOCHISH MASALASI

¹Ibaydullayev T. T., ²Xusanboeva N. R., ¹Tursunova D. T.

¹Andijon davlat universiteti, Andijon, O'zbekiston

²Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston

email: ibaydullayev73@mail.ru, apple-2024@inbox.ru

Masalaning qo'yilishi

Aytaylik R^n fazosida x boshqariluvchi obyekt y boshqariluvchi obyektни quvlayotgan bo'lsin. x orqali quvlovchining, y orqali esa qochuvchining R^n fazosidagi holatini belgilaymiz.

Mazkur ishda quvlovchi va qochuvchining harakatlari mos ravishda quyidagi dinamik sistemalar bilan ifodalangan differensial o'yin qaraladi:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

bu yerda, $x, y, u, v \in R^n, n \geq 1$; x_0, y_0 -obyektlarning boshlang'ich holatlari, $x_0 \neq y_0$ deb hisoblanadi, u, v -tezlik vektorlari, ular boshqaruv parametrlari bo'lib xizmat qiladi. Shu bilan birga u vektorning vaqt bo'yicha o'zgarishlari $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^n$ o'lchovli funksiya bo'lishi lozim. Unga quyidagi maxsus ko'rinishdagi integral chegaralanishlar qo'yiladi

$$\begin{cases} \int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \rho^2, \text{ при } 0 \leq t \leq \alpha, \\ \int_{t-\alpha}^t |u(s)|^2 ds \leq \rho^2, \text{ при } t \geq \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Bunday ko'rinishdagi chegaralanishlar ilk bor A.Azamov tomonidan qo'yilgan chegaralanishlarning xususiy holi bo'lib, u fizikaviy nuqtai nazardan quvlovchi energiyasining t vaqt o'tishi bilan uzluksiz tiklanuvchanligini bildiradi, bu yerda α -biror musbat son, ρ esa-nomanfiy son.

Shu kabi v vektorning vaqt bo'yicha o'zgarishlari $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^n$ o'lchovli funksiya bo'lishi lozim. Unga odatdagi geometrik chegaralanish qo'yilgan bo'lsin

$$|v(t)| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}}, t \geq 0, \quad (4)$$

bu yerda, σ - nomanfiy son. Bunda maxraj simmetriya maqsadida qo'yilgan.

x obyektning maqsadi qochuvchini tutish, ya'ni chekli t vaqtda

$$x(t) = y(t)$$

tenglikka erishish, bu yerda $x(t)$, $y(t)$ -o'yin jarayonida vujudga keladigan trayektoriyalar. Qochuvchi quvlovchi bilan uchrashmaslikka harakat qiladi, buning ilojisi bo'lmagan taqdirda xech bo'lmasa uchrashish vaqtini mumkin qadar cho'zishga harakat qiladi. Albatta, masalaning bunday qo'yilishi qo'shimcha izohlar talab qiladi.

Ushbu ishda quvlovchining bohqaruviga (3) ko'rinishdagi chegaralanish qo'yilgan differensial o'yin ilk bor o'rganilgan. U $0 \leq t \leq \alpha$ vaqt oralig'ida odatdagi integral chegaralanish bilan ustma-ust tushadi. Bundan buyon (3) va (4) chegaralanishlarni birgalikda AG-chegaralanishlar, ular bilan berilgan (1) va (2) o'yinni AG-o'yin deb yuritamiz

Teorema. Agar AG-o'yinda $\rho > \sigma$ bo'lsa, u holda o'yin quvlovchi uchun yutuqli bo'ladi va kafolatlangan tutish vaqti $T = \sqrt{\alpha} \frac{|z_0|}{\rho - \sigma}$ bo'ladi. Agar $\rho \leq \sigma$ bo'lsa, u holda o'yin qochuvchi uchun yutuqli bo'ladi.

Xulosa

Ushbu maqolada biz ilk bor Akademik A.Azamov tomonidan qo'yilgan maxsus ko'rinishdagi integral chegaralanishli quvish va qoshish o'yinini qaradik. Bunda aytilgan chegaralanish faqat quvlovchiga qo'yildi. Qochuvchiga esa oddiy geometrik chegaralanish qo'yildi. O'yinning qanday shartlarda quvlovchining foydasiga xal bo'lishi va qanday shartlarda qochuvchining foydasiga xal bo'lishi batafsil ko'rsatildi. Albatta, yuqorida aytilgan maxsus chegaralanishlarni qochuvchi uchun ham qo'yish mumkin. Yana bu shartlarning umumiy hollari ham mavjudki, ularni o'rganish juda ham dolzarb hisoblanadi. Bulardan tashqari olingan natijalarni ko'p quvlovchili o'yinlar uchun ham qo'llash mumkin bo'ladi.

Adabiyotlar ro'yxati

[1] A.A.Азамов. Математические труды А.А.Азамова I. Ташкент, «Университет», 2017 год, 368 стр.

[2] Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.Т. О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // ПММ. – Москва, 2007. – Т.71. – Вып. 2.– С.259-263. Английский перевод: Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Samatov B.T. The Relation between Problems of Pursuit, Controllability and Stability in the Large in Linear Systems with Different Types of Constraints // J. AMM. – Elsevier, 2007. – V.71. – N 2. – P. 229-233.

[3] Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.Т. Стратегия параллельного сближения: аналогии и обобщения // Актуальные проблемы

теории устойчивости и управления: Тез. докл. межд. конф. 21 -26 сентября 2009.– Екатеринбург, 2009. – С. 25-26.

[4] Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б. Преследование на плоскости. – М.: Наука, 1991. – 96 с.

[5] Ibragimov, G.I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader. *Differ. Equ.* 2005, 41, 627–635.

[6] Azamov A.A., Samatov B.T. The Π -Strategy: Analogies and Applications, The Fourth International Conference Game Theory and Management, St. Petersburg, 2011, vol. 4, pp. 33–47.

KOEFFITSIENTLARI UZILISHGA EGA BO'LGAN BIR TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

^{1,2}*Irgashev B.Yu., ³Abduraxmonova F. Sh.*

¹*Namangan muhandislik-qurilish instituti,*

²*V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti,*

³*Namangan Davlat Universiteti.*

e-mail: bahromirgasev@gmail.com

$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ to'rtburchakli sohada

$$L[u] \equiv \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right) \left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$a > b > 0, a, b \in \mathbb{R},$$

tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalani o'rganamiz.

A masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan funksiya topilsin:

$$u \in C^3(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega_+ \cup \Omega_-), \Omega_+ = \Omega \cap (y > 0), \Omega_- = \Omega \cap (y < 0),$$

$$u'(0, y) = u'(1, y) = u'''(0, y) = u'''(1, y) = 0, -1 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$u(x, -1) = \varphi_0(x), u''(x, -1) = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(x, 1) = \psi_0(x), u''(x, 1) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

bu yerda $\varphi_s(x), \psi_s(x), s = 0, 1$ yetarli darajada silliq funksiyalar.

(1) kabi tenglamalarni o'rganish muhimligini A.V.Bitsadze ta'kidlab o'tgan [1]. $a = b$ holatlarni M.M.Smirnov, V.I.Gegalov tomonlaridan o'rganilgan [2-3]. (1) turdagi ikkinchi tartibli tenglama Lavrentev-Bitsadze tenglamasi bo'lib, bu tenglama uchun Dirixle masalasining nokorrekt bo'lishini A.V.Bitsadze tomonidan ko'rsatib o'tilgan [1]. Shundan so'ng mutaxassislar turli usullardan foydalangan holda, 2-tartibdagi aralash turdagi tenglama uchun ham silliq koefitsientli yuqori tartibli tenglamalar uchun ham Dirixle masalasini hal qilishning o'ziga xos shartlarini topdilar.

Yechimni

$$u(x, y) = Y_k(y) \cos \pi k x, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

ko'rinishda qidiramiz va (3)-(4) shartlarni hisobga olib, $Y_k(y)$ ga nisbatan quyidagi masalaga kelamiz

$$\begin{cases} Y_k^{(4)} - (a^2 + b^2) \operatorname{sgny}(\pi k)^2 Y_k^{(2)} + (ab)^2 (\pi k)^4 Y_k = 0, \\ Y_k(-1) = \varphi_{0k}, Y_k''(-1) = \varphi_{1k}, \\ Y_k(1) = \psi_{0k}, Y_k''(1) = \psi_{1k}, \\ Y_k(-0) = Y_k(+0), Y_k'(-0) = Y_k'(+0), \\ Y_k''(-0) = Y_k''(+0), Y_k'''(-0) = Y_k'''(+0), \end{cases} \quad (5)$$

bu yerda

$$\varphi_{ik} = 2 \int_0^1 \varphi_i(x) \cos \pi k x dx, i = 0, 1; k \in N \cup \{0\};$$

$$\psi_{ik} = 2 \int_0^1 \psi_i(x) \cos \pi k x dx, i = 0, 1; k \in N \cup \{0\}.$$

$k = 0$ bo'lgan holatda (5) masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi

$$Y_k = c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4,$$

Endi $k \in N$ bo'lsin. a) $y > 0$ bo'lsa

$$Y_k(y) = c_1 e^{a\pi ky} + c_2 e^{b\pi ky} + c_3 e^{-a\pi ky} + c_4 e^{-b\pi ky}, \quad (6)$$

b) $y < 0$ bo'lsa umumiy yechim quyidagicha bo'ladi:

$$Y_k(y) = d_1 \cos a\pi ky + d_2 \sin a\pi ky + d_3 \cos b\pi ky + d_4 \sin b\pi ky. \quad (7)$$

1-Holat. $a, b \in N$. Unda (5) sistemadan hosil bo'lgan algebraik sistemaning asosiy determinant Δ quyidagicha bo'ladi

$$\Delta = 2(-1)^{k(a+b)} (\pi k)^4 ab(a^2 - b^2)^4 \operatorname{sh}(a\pi k) \operatorname{sh}(b\pi k) \neq 0, k \in N. \quad (8)$$

2-Holat. $a - b = 2n, a, b \notin N$. Unda

$$\Delta = O\left(e^{(a+b)\pi k} \left[(b^2 - a^2) + 2ab \sin 2a\pi k\right]\right), k \rightarrow +\infty.$$

(9)

3-Holat. $a - b = 2n + 1$ bo'lganda ham (9) ifodaga kelamiz

Agar $b = a - 2n$ bo'lsa (10), agar $b = a - (2n + 1)$ bo'lsa (11) tengsizliklar kelib chiqadi:

$$n(2 - \sqrt{2}) < a < n(2 + \sqrt{2}), \quad (10)$$

$$(2n + 1)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < a < (2n + 1)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad (11)$$

1-teorema. Agar $a, b \in N$ yoki $\Delta \neq 0$ va a, b lar uchun (10) yoki (11) shartlar bajarilsin, unda quyidagi baholar o'rinli bo'ladi:

$$|Y_k^{(j)}(y)| \leq k^j M \{|\varphi_{0k}| + |\varphi_{1k}| + |\psi_{0k}| + |\psi_{1k}|\}, k \rightarrow \infty, j = \overline{0, 4}.$$

2-teorema . Agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) 1-teorema o'rinli; 2) $\varphi_s(x), \psi_s(x) \in C^5[0; l], s = 0, 1;$

3) $\varphi_s^{2m}(0) = \varphi_s^{2m}(l) = 0, \psi_s^{2m}(0) = \psi_s^{2m}(l) = 0, s = 0, 1, m = 0, 1,$

unda

$$u(x, y) = (c_1 y^3 + c_2 y^2 + c_3 y + c_4) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x),$$

qator A masalasining yechimi bo'ldi.

3-teorema. A masalasining yechimi yagona bo'lishi uchun, Δ noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli.

ADABIYOTLAR

[1] А.В. Бицадзе. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // ДАН СССР. 1953. Т. 122. №2. С. 167-170.

[2] Смирнов М. М. Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка // Дифференц. уравнения, 1975, т.11, № 9, с.1678–1686.

[3] Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка // Докл. АН СССР, 1961, т.136, № 2, с. 274–276.

SIMPLIFIED FORMULAS FOR THE INTEGRAL OF THE THIRD METHOD IN DIFFERENTIAL GAMES OF PURSUIT FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Iskanadjiev I.M.

Tashkent institute of chemical technology

e-mail: iskan1960@mail.ru

In the present paper it will be studied a controlled system described by differential inclusions $\dot{z} \in -F(t, v)$, where F is a continuous multivalued mapping. The modified first direct method of pursuit with respect to such classes of games is described. New simplified formulas for the integral of this method are proposed and new approximate schemes that approximate the integral of this method with a given accuracy are constructed.

Futher we shall use the following notations: $I = [0, \tau]$ is the fixed closed interval of time; K^d (C^d , respectively) is the collection of all nonempty compact (closed) subsets of R^d . A function $a(\cdot): \Delta \rightarrow R^d$, $a(t) \in A(t)$ almost everywhere (a.e) on Δ is called a single-valued selection of the mapping $A(\cdot): \Delta \rightarrow C^d$ and $L[A(\cdot), \Delta]$ is denoted the family of all integrable single-valued selection of the mapping $A(\cdot): \Delta \rightarrow C^d$ on Δ .

The set

$$\int_{\Delta} A(t) dt = \left\{ \int_{\Delta} a(t) dt, a(t) \in L[A(\cdot), \Delta] \right\}$$

is called the integral of the measurable multivalued mapping $A(\cdot): I \rightarrow C^d$.

We considered the controlled differential inclusion

$$\dot{z} \in -F(t, v), \quad (1)$$

where $z \in R^d, t \in I = [0, \tau], v \in Q, Q \in K^q, F: I \times Q \rightarrow coK^d$ is a continuous mapping. There is also given subset $M, M \in coC^d$ which is called terminal set of system (1).

Let $cl\Phi$ ($comp\Phi$, respectively) be a family of all measurable closed-

valued (compact-valued, respectively) mappings $A(\cdot): I \rightarrow C^d$ ($A(\cdot): I \rightarrow K^d$, respectively) that satisfy the condition

$$\int_0^\tau A(t)dt \subset M. \quad (2)$$

The first direct pursuit method based on formula (2) was developed in [1-3]. We define

$$W[A(\cdot), \tau] = \int_I \bigcap_{v \in Q} [A(t) + F(t, v)] dt$$

for each $A(\cdot) \in cl\Phi$.

We note that if the following inclusion

$$z_0 \in W_{\text{mod}}^\tau = \bigcup_{A(\cdot) \in cl\Phi} W[A(\cdot), \tau],$$

holds, then in the game (1) it is possible to complete pursuit in time τ in the class of stroboscopic strategies (see also [1-3]). W_{mod}^τ will be called the integral of the modified first direct method of pursuit for differential inclusions.

The problem of computation W_{mod}^τ is important. However, in most cases the integral W_{mod}^τ can not be accurately calculated. For calculation the set W_{mod}^τ it is necessary to take the union over all possible measurable closed-valued maps. Naturally the question arises: is it possible to distinguish a subfamily of measurable closed-valued maps that would have a simpler structure and sufficient for approximate calculation of the set W_{mod}^τ . In the present article, the answer to the above posed question by narrowing the union operation in the definition W_{mod}^τ to a class of continuous compact-valued maps is given.

Let $\omega_n = \{0 < \delta < \dots < (n-1)\delta < n\delta = \tau\}$ be a sequence of uniform partitions of the segment I . We put

$$\hat{D}^\tau(M, \delta) = \sum_{i=1}^n \bigcap_{v \in Q} [\hat{A}_i + F_i(v)],$$

where

$$\hat{A}_i = \int_i \hat{A}(t)dt, \quad F_i = \int_i F(t, v)dt.$$

Theorem 1. If $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ and $\hat{A}(t)$ is piecewise constant mapping on I , then

$$W[\hat{A}(\cdot), \tau] = \bigcap_{\delta > 0} \hat{D}^\tau(M, \delta).$$

Corollary 2. If $\hat{A}(\cdot) \in comp\Phi$ and $\hat{A}(t)$ is a piecewise constant mapping on I with one discontinuity point $t_1 \in I$, then for any sufficiently small positive number ε there exists a natural number $N = N(\varepsilon)$ such that

$$h[W[A(\cdot), \tau], \tilde{D}_1^\tau(\tilde{M}, \delta)] < \varepsilon$$

for any $n > N(\varepsilon)$. Here $\delta = \frac{\tau}{n}$.

Let $\hat{A}(\cdot) \in \text{comp}\Phi$ be piecewise constant mapping on I and have the number of discontinuity points l , i.e. $\hat{A}(t) = A_j$ at $t \in (t_{j-1}, t_j)$, $j=1, 2, \dots, l, l+1$ and $t_0 = 0, t_{l+1} = \tau$. We will assume that $t_j \in (t_{k_{j-1}}, t_{k_j})$, $j=1, 2, \dots, l, l+1$. We define

$$\begin{aligned} \tilde{D}_l^\tau(\tilde{M}, \delta) = & \sum_{i=1}^n \bigcap_{\substack{v \in Q \\ i \neq k_j}} [\delta A_i + \delta F(\xi_i, v) + \delta F(\xi_i, v) + \delta \Gamma(\delta)H] + \\ & + \sum_{j=1}^l \bigcap_{v \in Q} [(t_j - \tau_{k_{j-1}})A_{j-1} + (\tau_{k_j} - t_1)A_j + \delta F(\xi_{k_j}, v) + \delta \Gamma(\delta)H] \end{aligned}$$

Theorem 2. The following equality

$$W[\hat{A}(\cdot), \tau] = \bigcap_{\delta > 0} \hat{D}_l^\tau(M, \delta)$$

is valid.

Reference

- [1] Satimov N. To the pursuit problem in linear differential Games, *Differentsialnyye uravneniya*, 1973, **9**, No.11, 2000 - 2009.
- [2] Azamov A., Samatov B.T. On a modified third method in pursuit problems, *Sbornik "Non-classical problems of mathematical physics"*, Tashkent: Fan, 1985, 174 – 184 (in Russian).
- [3] Nikolsky M.S. On a direct method for solving linear differential games of pursuit-evasion, *Matematicheskie zametki*, 1983, **33**, No. 6, 885-891.

INTEGRO-DIFFERENCIALLIQ TEŊLEMELERDIN PERIODLI SISTEMALARI USHIN ORTALANDIRIW METODININ BIR BAHALAWI

Jamalov Q. N., Nurjanov O. D.

Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti

e-mail: qayratdinjamalov95@gmail.com

Kishi parametrge iye sheklengen sońǵı tásirli

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon \int_{t-h}^t \varphi(t, s, x(s)) ds \quad (1)$$

kórinisindegi integro-differenciallıq teńlemelerdin periodlı sistemasın ortalandırıw metodı [1] menen úyrenemiz, bunda $\varepsilon > 0$ - kishi parametr, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n ólshemli vektor, $f(t, x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ hám $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ - n ólshemli vektor-funkciyalar, bul funkciyalar $(t, s, x, y) \in \Omega = [0, T] \times [0, T] \times D \times D_1$, $D \subset E_n$, $D_1 \subset E_n$ oblastta anıqlanǵan, úzliksiz, f funkciyası t boyınsha, al φ funkciyası t hám s boyınsha $\frac{2\pi}{\nu}$, $\nu = \text{const} > 0$ periodqa iye periodlı funkciyalar, $h > 0$ - turaqlı shama, E_n - n ólshemli Evklid keńisligi.

Biz (1) sistemanın periodlı sheshimlerin ortalandırıw metodı járdeminde juwıq tabıw máselesin qaraymız.

Berilgen (1) integro-differenciallıq teńlemeler sistemasına ortalandıırıwdıń birinshi sxemasına [2] muwapıq,

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon F_0(\xi) \quad (2)$$

túrindegi ortalangán sistema sáykes qoyıladı, bunda

$$F_0(x) = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} \left[f(t, x) + \int_{t-h}^t \varphi(t, s, x) ds \right] dt.$$

Bul jerde (1) teńlemedegi integrallıq aǵzadaǵı integral anıq túrde qatnasqan s ózgeriwshisi boyınsha esaplanadı, al bunda t hám x ózgeriwshileri parametrler dep uyǵarıladı.

Meyli tómendegi shártler orınlanatuǵın bolsın:

1) $f(t, x)$ hám $\varphi(t, s, x)$ funkciyaları ózleriniń barlıq argumentleri boyınsha Ω oblastta anıqlangán hám úzliksiz, f funkciyası t boyınsha, al φ funkciyası t hám s boyınsha $\frac{2\pi}{\nu}$ periodqa iye periodlı funkciyalar bolsın, sonıń menen birge, bul funkciyalar x boyınsha úzliksiz differenciallanatuǵın bolsın;

2) f hám φ funkciyaları

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq M, \quad \|\varphi(t, s, x)\| \leq N, \\ \|f(t, x) - f(t, x')\| &\leq K_1 \|x - x'\|, \quad \|\varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x')\| \leq K_2 \|x - x'\|, \\ \left\| \int_0^t \frac{\partial \varphi(t, s, x)}{\partial x} ds \right\| &\leq K_3 \end{aligned}$$

teńsizliklerin barlıq $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$, $s \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$, $x, x' \in D$ ushın qanaatlandırınsın, bunda M, K_i , $i=1, 2, 3$, L - bazıbir oń turaqlılar.

Berilgen (1) teńlemeler sisteması $t=0$ bolǵanda $x(0) = x_0$ baslanǵısh shártin qanaatlandıratuǵın birden-bir $x = x(t, \varepsilon)$ sheshimge iye bolsın hám bul sheshim $t \in [0, T]$, $0 < T \leq \frac{L}{\varepsilon}$, $L > 0$ bolǵanda $x(t, \varepsilon) \in D$ bolsın. (2) ortalangán sistema $\xi = \xi(\varepsilon t)$, $\xi(0) = x_0$, $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ sheshimge iye bolsın.

Bul jumısta joqarıdaǵı shártler orınlanganda (1) teńlemeler sisteması ushın ortalandıırıw metodın tiykarlaytuǵın $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ushın

$$\max_{t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]} \|x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t)\| \leq \varepsilon C$$

bahalawınıń orınlı bolıwı kórsetiledi, bunda C tek M, K_i , $i=1, 2, 3$, L turaqlılarına baylanıslı bolǵan oń turaqlı.

Ádebiyatlar

[1] Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Математические проблемы нелинейной механики. – Киев: Вища школа, 1987. – 72 с.

[2] Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

CARLEMAN ESTIMATE FOR PARABOLIC EQUATION WITH A DISCONTINUOUS DIFFUSION COEFFICIENT

Jumaeva Sh.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: shahnozafarhodovna79@gmail.com

The Carleman estimates are used to obtain qualitative information about the solutions of PDEs, such as their decay rates, regularity, and uniqueness. In the case of a time-fractional parabolic equation with a discontinuous diffusion coefficient, the Carleman estimates can be used to establish unique continuation results for the solution of the equation. Specifically, one can show that if the solution of the equation vanishes on an open subset of the domain, then it must vanish identically. In [1], Yamamoto provides a detailed introduction to the theory of Carleman estimates for parabolic equations and their applications. Carleman estimates basically involve creating a weight function that meets a set of requirements and using it to estimate solutions to the parabolic equation. Typically, a solution of an adjoint equation with a stable energy functional is chosen as the weight function. Yamamoto starts by introducing the basic theory of Carleman estimates and their use in proving observability and controllability results for parabolic equations. He presents several applications of Carleman estimates, including the proof of unique continuation and stability results for various parabolic equations, and the design of numerical algorithms for solving inverse problems.

In [2], Benabdallah, Gaitan, and Le Rousseau study an inverse problem for the heat equation with a discontinuous diffusion coefficient and an initial condition that may have jumps. The inverse problem consists of determining the diffusion coefficient and the initial condition from a given set of measurements of the solution of the heat equation. The authors show that under certain assumptions on the data, the inverse problem is well-posed and the solution is stable with respect to small perturbations of the data. The stability result is obtained using Carleman estimates and a regularization argument. Let's elaborate on [2] by giving more information about the inverse problem's mathematical formulation and the data assumptions. The heat equation's inverse problem with a discontinuous diffusion coefficient and a potentially jumpy beginning condition is as follows.

Given the measured solution $u(x, t)$ of the following heat equation:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \nabla(k(x)\nabla u(x, t)) = 0, & x \in \Omega, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$, and given the measurements of the solution on a subset Γ of $\partial\Omega$, find the diffusion coefficient $k(x)$ and the initial condition $u_0(x)$. The

diffusion coefficient $k(x)$ is assumed to be piecewise constant and discontinuous at a finite number of interfaces $\Gamma_j \subset \Omega$, where $j=1, \dots, N$. The initial condition $u_0(x)$ may have jumps across Γ_j , but is assumed to be continuous elsewhere. The authors make the following assumptions on the data:

- I. The measured solution $u(x, t)$ is sufficiently smooth and satisfies suitable boundary conditions on Γ .
- II. The initial condition $u_0(x)$ is sufficiently smooth and has jumps across Γ_j , but is assumed to be known up to a small perturbation.

Under these assumptions, the authors prove that the inverse problem is well-posed and the solution is stable with respect to small perturbations of the data. They use a regularization argument based on the Tikhonov regularization method to obtain a stable solution of the inverse problem. Overall, [2] provides a useful contribution to the study of inverse problems for PDEs with discontinuous coefficients, and highlights the important role that Carleman estimates can play in the stability analysis of such problems.

References

- [1] M. Yamamoto. Carleman estimates for parabolic equations and applications. Inverse problems, 2009
- [2] A. Benabdallah, P. Gaitan, J. Le Rousseau. Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation. SIAM J. Control Optim., 2007, 46(5).

NON-LOCAL TIME-DEPENDENT INVERSE SOURCE PROBLEM WITH UNKNOWN FUNCTION ON THE BOUNDARY FOR MIXED EQUATION WITH THE CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

¹Karimov E., ²Tokmagambetov N., ³Khasanov Sh.

¹Fergana State University, Fergana, Uzbekistan,

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,

³Namangan Engineering Construction Institute, Namangan, Uzbekistan.

e-mail: erkinjon@gmail.com, tokmagambetov@math.kz

In the domain Ω we will study the following mixed equation

$$r(t)g(t, x) = \begin{cases} {}^C D_{0t}^\alpha u(t, x) - u_{xx}(t, x), & (t, x) \in \Omega^+, t > 0 \\ {}^C D_{t_0}^\beta u(t, x) - u_{xx}(t, x), & (t, x) \in \Omega^-, t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Here $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \{t = 0\}$ with $\Omega^+ = \{(t, x) : 0 < x < 1, 0 < t < q\}$, $\Omega^- = \{(t, x) : 0 < x < 1, -p < t < 0\}$, $p, q \in \mathbb{R}^+, 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g(t, x)$ is a given function, but $r(t)$ is unknown function, and ${}^C D_{0t}^\alpha u(t, x)$, ${}^C D_{t_0}^\beta u(t, x)$ represent the Caputo fractional order derivative of the function $u(t, x)$ given as follows [1]:

$${}^C D_{at}^\alpha g(t, x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}^{n+1}(t-a)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{\partial^n g(z, x)}{\partial z^n} (t-z)^{n-\alpha-1} dz, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n g(t, x)}{dt^n}, & \alpha = n. \end{cases}$$

We have proved a unique solvability of the following non-local inverse source problem:

Problem: To find three functions $\{u(t, x), r(t), \psi(t)\}$ from the class of functions

$$W = \left\{ u(t, x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega^+ \cup \Omega^-), {}^C D_{0t}^\alpha u(t, x) \in C(\Omega^+), {}^C D_{t0}^\beta u(t, x) \in C(\Omega^-) \right\}$$

satisfying non-local conditions in space-variable

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 1), u(t, 1) = 0, -p \leq t \leq q, \quad \text{boundary condition}$$

$$u(-p, x) = \psi(x), u(q, x) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad \text{sewing condition}$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} {}^C D_{0t}^\alpha u(t, x) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(t, x), 0 < x < 1, \quad \text{and over-determination conditions}$$

$$\int_0^1 u(t, x) dx = N_2(t), t \in [-p; 0], \int_0^1 u(t, x) dx = N_1(t), t \in [0; q].$$

Here $\varphi(x)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ are given functions but $\psi(x)$ is unknown function.

A unique solvability of a space-dependent inverse source problem for mixed equation with the Caputo fractional derivative was studied in [2].

References

[1]. A.V. Pskhu. Partial differential equations of fractional order. Moscow: Nauka, 2005

[2]. E.Karimov, N.Al-Salti, S.Kerbal. An inverse source non-local problem for a mixed type equation with a Caputo fractional differential operator, East Asian Journal of Applied Mathematics, 7(2) (2017) 417–438.

ON THE CONTINUATION OF THE SOLUTIONS OF A GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEM IN BOUNDED DOMAIN

Khasanov A. B., Ermamatova F. E.

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

e-mail: ahasanov2002@mail.ru, Sattorov-e@rambler.ru

In this paper, we propose an explicit formula for the reconstruction of a generalized potential vector in the domain by its known values on a part of the boundary, i.e., we present an explicit formula for the continuation of the solution of the Cauchy problem for a generalized Cauchy–Riemann system [1].

Let $x = (x_1, x_2, x_3)$ and $y = (y_1, y_2, y_3)$ be points of the real three dimensional Euclidean space R^3 , Ω is a part of a ball $B = B(0, R)$ with center at the origin and radius $R > 0$. Let S be a smooth closed surface in B which does not meet $x = 0$ and divides B into two domains. Denote by Ω the closed domain that

does not contain the origin. Its boundary $\partial\Omega$ consists of simply connected domain in R^3 , with piecewise-smooth boundary consisting of S and a part of the sphere ∂B in R^3 .

Suppose that vector function $U = (u_1, u_2, u_3)$ satisfied in D the system equations [1]

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + a_k u_k \right) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - b_k u_j + b_j u_k = 0 \quad (k, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Statement of the problem. Find a regular solution U of system (1) in the domain D using its Cauchy data on the surface S :

$$U(y) = f(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

where $f(y)$ is a given continuous vector function on S .

Using results from [2], [3],[4] on solving the Cauchy problem, we construct the Carleman matrix for the Laplace and Helmholtz equations in explicit form and, on its basis, the regularized solution of the Cauchy problem for system (1). By using the continuation formula we found necessary and sufficient for the extendibility of functions given on a part of a boundary to the domain as a solution of the system (1). We prove the Fock-Kryni theorem for this one. This result was proved in [5]-[7] of the another domain Ω three-dimensional Euclidean space.

REFERENCES

- [1] E. I. Obolashvili, "The spatial analog of generalized analytic functions," *Soobshch. AN GSSR* 73(1), 20–24 (1974).
- [2] Lavrent'ev M.M. *Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Novosibirsk, 1962, 92 pp.
- [3] Yarmukhamedov Sh. // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 235(2), 281-283 (1977).
- [4] Yarmukhamedov Sh. // *Dokl. Ross. Akad. Nauk* 357(3), 320-323 (1997)
- [5] Sattorov E. // *Differentsial'nye Uravneniya* 44(8), 1100-1110 (2008).
- [6] Sattorov E. // *Mathematical Notes* 85(5), 733-745 (2009).
- [7] Sattorov E. // *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, №1, 32-45 (2011)

SOLITARY AND PERIODIC WAVE SOLUTIONS OF THE LOADED BURGER'S EQUATION BY FUNCTIONAL VARIABLE METHOD

Khasanov M.M., Ganjaev O.Y., Nurmetova A.A.

Urgench State University, Urgench, Uzbekistan.

e-mail: hmuzaaffar@mail.ru, otabekxiva3639@gmail.com

We apply the functional variable method to solve the loaded nonlinear Burger's equation.

Consider the following loaded nonlinear Burger's equation

$$u_t + uu_x - u_{xx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0, \quad (1)$$

where $u(x,t)$ is an unknown function, $x \in R$, $t \geq 0$, $\gamma(t)$ - is the given real continuous function.

Let us given a nonlinear partial differential equation in the following form

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2)$$

where P is a polynomial in $u = u(x, t)$ and its partial derivatives.

Step 1. It is used the following transformation for a nonlinear partial differential of eq.(2):

$$u(x, t) = u(\xi), \quad (3)$$

with

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{du}{d\xi}, \dots \quad (4)$$

where

$$\xi = px - kt, \quad p = \text{const}, \quad (5)$$

and k is the speed of the traveling wave.

Putting eq. (3) and eq. (4) into nonlinear partial differential eq. (2), we obtain the following ODE of the form

$$F(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad u' = \frac{du}{d\xi}, \quad (6)$$

where, F is a polynomial in $u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots$

Step 2. Let

$$u' = F(u). \quad (7)$$

It follows that

$$\int \frac{du}{F(u)} = \xi + \xi_0,$$

where we suppose $\xi_0 = 0$ for convenience. Higher-order derivatives of u are defined as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' = \frac{1}{2} \frac{d(F^2(u))}{du} \\ u''' = \frac{1}{2} \frac{d^2(F^2(u))}{du^2} \sqrt{F^2(u)} \\ u^{(IV)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^3(F^2(u))}{du^3} F^2(u) + \frac{d^2(F^2(u))}{du^2} \frac{d(F^2(u))}{du} \right) \\ \dots \end{array} \right. \quad (8)$$

Step 3. Substituting eq. (8) into eq. (6), we obtain

$$G(u, \frac{dF(u)}{du}, \frac{d^2F(u)}{du^2}, \frac{d^3F(u)}{du^3}, \dots) = 0. \quad (9)$$

The equation (9) is of special interest because it admits analytical solutions for a large class of nonlinear wave type equations. After integration, equation (9) provides the expression of F and this, together with equation (7), gives solutions to the original problem.

References

- [1] H. Bateman. Some recent researches on the motion of fluids. Monthly Weather Review, 43:163-170, 1915.
- [2] A. A. Soliman. The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, vol. 361, no. 2, pp. 394-404, 2006.
- [3] J. Biazar and A. Hossein. Exact and numerical solutions for non-linear Burger's equation by VIM. Mathematical and Computer Modelling, 49:1394-1400, 2009.
- [4] J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In Advances in applied mechanics, 1:171-199, 1947.

SUYUQLIK HARAKATINING DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI

Kuralov J.A, Davranov I.

Toshkent iqtisodiyot va pedagogika instituti
e-mail: kuralov.jondust@gmail.com

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlikning asosiy differensial tenglamalariga keltirib chiqarish uchun tutash muhitning kuchlanishlarga nisbatan olingan dinamik tenglamalaridan foydalaniladi. Yopishqoq suyuqlik harakatini o'rganishda quyidagi uchta gipotezalarni qanotlantiruvchi suyuqlik qaraladi:

- Kuchlanish zarrachalar tezliklariga proporsional va ular bilan chiziqli bog'langan:
- Kuchlanishlar va deformatsiya tezliklari orasidagi chiziqli bog'lanish ifodasi fazoning barcha nuqtalari uchun bir xil deb qaraladi.
- Suyuqlik izotrop deb faraz qilinadi, ya'ni uning xossalari ixtiyoriy yunalishda bir xil.

Siqilmaydigan suyuqlik uchun $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Siqilmaydigan yopishqoq suyuqlik harakat tenglamalari quyidagicha yoziladi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

bu erda: u, v, w – tezlikni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari; F_x, F_y, F_z – birlik massaga keltirilgan massaviy kuchning proyeksiyalari; ρ – kinematik yopishqoqlik koeffitsiyenti, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplas operatori.

p, u, v, w – 4 ta noma'lum funksiyalarni aniqlash uchun (1) yopiq tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik.

(1) harakat differensial tenglamalarni vektor ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad (2)$$

Olingan (1) yoki (1) tenglamalar sistemasi yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stoks tenglamalaridir.

Umuman olganda, (1) – tenglamalarga kirgan ρ zichlik va ν yopishqoqlik koeffitsiyenti oldindan ma’lum deb olinadi, massaviy kuchlar preksiyacari (F_x, F_y, F_z) esa aniq masalaning shartlarida berilgan bo‘ladi.

Matematik nuqtaiy nazardan, Nave-Stoks tenglamasi 2-tartibli xususiy hosilali nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi hisoblanadi.

Bu tenglamalarning asosiy noqulayliklaridan biri, tezlanishlarning konvektiv hadlarini hisobga oluvchi chiziqliksizligida. Shuning uchun uning umumiy echimlari hali keltirib chiqarilmagan. Ba’zi hollarda xususiy echimlarigina olingan.

Nave-Stoks tenglamasida $\mu = 0$ bo‘lganda ideal suyuqlik harakat tenglamalarini olish mumkin.

Siqilmaydigan ideal suyuqlikning harakati tenglamalari ko‘rinishida yoziladi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (4)$$

(4) tenglama siqilmaslik shartni ifodalaydi, (3) tenglamaning o‘ng tomoni tashqi kuchlar va gidrodinamik bosim kuchini ifodalaydi.

Bu erda birinchi tenglama – Eyler tenglamasi deb ataluvchi harakat differensial tenglamasi, ikkinchisi – uzluksizlik tenglamasi (impulsar tenglamasi), $\vec{V}$ - suyuqlik zarrasining tezlik vektori; ρ va p - mos ravishda zichlik va bosim, $\vec{F}$ – massaviy kuchlar vektori.

To‘la tenglamalar sistemasini olish uchun

$$\rho = \rho(p) \quad (5)$$

holat tenglamasi (barotrop jarayon) qo‘shiladi.

Oqim potentsiali bo‘lsin, ya’ni suyuqlikka ta’sir etuvchi kuchlar potentsialga ega bo‘lsin: $\vec{F} = \text{grad} U$. Agar suyuqlik og‘irlik kuchi maydonida bo‘lsa, u holda $U = -gz$.

Harakat davomida $\text{rot} \vec{v} = 0$ shart bajarilsa, oqim uyurmasiz bo‘ladi, bu shart tezliklar maydoning potentsiali bo‘lishining zaruriy va etarli shartini ifodaladi: $\vec{v} = \text{grad} \varphi$.

Potensiallilik sharti quyilgan masalani soddalashtirishga olib keladi va tezlikni izlash o‘rniga φ tezlik potentsialini topish etarli bo‘ladi. Siqilmas suyuqlik uchun (1.4) uzluksizlik tenglamasi va harakatning potentsialli ekanligidan tezlik potentsiali uchun Laplas tenglamasini olamiz:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (6)$$

Bunda φ – garmonik funksiya.

Shunday qilib, suyuqlikning tekislikdagi oqimi ko‘yilgan shartlarga mos keluvchi garmonik funksiyani aniqlashga keltirildi.

Adabiyotlar

[1] Шароглазов Б.А., Фарафонов М.Ф., Клементьев В.В. Двигатели внутреннего сгорания: теория, моделирование и расчёт процессов. Челябинск, Изд. ЮУрГУ, 2005.

[2] Venkata Suman Movva, B.Tech. Simulation of fluid flow in internal combustion engines using wave action simulation. A thesis in Mechanical Engineering, 2004.

[3] Kuralov J. Dvigatel silindridagi gaz oqimini sonli modellashtirish. «Mexanika va matematikaning amaliy muammoli» mavzusidagi Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari. Toshkent kimyo-texnologiya instituti, 2022 yil.

UMUMLASHGAN KASR TARTIBLI OPERATOR QATNASHGAN DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN 1-CHEGRAVIY MASALA

Mamadaliyev A.U.

Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston

e-mail: azimjonmamadaliyev67@gmail.com

Ma'lumki, fizika, mexanika, geologiyaga bog'liq jarayonlarni matematik modellashtirishda differensial tenglamalar keng qo'llaniladi. Oxirgi yillarda butun tartibli differensial tenglamalarning umumlashmasi hisoblangan kasr tartibli differensial tenglamalar jadal tadqiq etilmoqda. Bunday tenglamalar uchun turli boshlang'ich, chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi matematik modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etmoqda [1]. Ushbu tadqiqot ishida umumlashgan kasr tartibli operator qatnashgan diffuziya tenglamasi uchun 1-chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Quyidagi tenglamani

$${}^*D_{0t}^{\alpha}u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

$\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ sohada tadqiq qilamiz. Bu yerda $f(x,t)$

berilgan funksiya, ${}^*D_{0t}^{\alpha}y(t) = G(\alpha) \int_0^t y'(s)K(t,s,\alpha)ds$, $0 < \alpha < 1$ - umumlashgan α

tartibli integro – diferensial operator [1], $G(\alpha)$ - berilgan funksiya bo'lib, u $G(0) = G(1) = 1$ shartni qanoatlantiradi, $K(t,s,\alpha)$ ham berilgan funksiya bo'lib, ushbu tadqiqot ishida uni uzluksiz yoki integrallanuvchi maxsuslikka ega bo'lishini talab etamiz.

Masala: (1) tenglamaning Ω sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi regular yechimi topilsin:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

bu yerda $\varphi(x)$ - berilgan funksiya.

Bu masalani o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan tadqiq etamiz.

Masalaning yechimini

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t) \sin n\pi x. \quad (4)$$

ko'rinishida qidiramiz, bu yerda $U_n(t)$ lar hozircha noma'lum funksiyalar. Berilgan funksiya $f(x,t)$ ni ham yuqoridagi Sistema orqali yoyib olamiz:.

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin n\pi x. \quad (5)$$

Bu yerda $f_n(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin n\pi x dx$. (4) va (5) ni (1) ga qo'yamiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [{}^*D_{0t}^{\alpha} U_n(t) - (n\pi)^2 U_n(t)] \sin n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin n\pi x \quad (6)$$

(6) dan esa ${}^*D_{0t}^{\alpha} U_n(t) - (n\pi)^2 U_n(t) = f_n(t)$ tenglama kelib chiqadi. (2) shartdan esa $U_n(0) = \varphi_n$ ni olamiz. Bu yerda $\varphi_n(t) = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x dx$. Ushbu masalaning yechimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$U_n(t) = \frac{1}{\frac{\partial K(t,s,\alpha)}{\partial s} \Big|_{s=t}} \left[-f_n'(t) - G(\alpha) \varphi_n \frac{\partial K(t,0,\alpha)}{\partial s} \right] - \\ - \int_0^t \frac{1}{\frac{\partial K(z,s,\alpha)}{\partial s} \Big|_{s=z}} \left[-f_n'(z) - G(\alpha) \varphi_n \frac{\partial K(z,0,\alpha)}{\partial s} \right] R(t,z,\alpha) dz,$$

agar $G(\alpha)K(t,t,\alpha) - (n\pi)^2 = 0$ bo'lsa,

$$U_n(t) = \frac{1}{G(\alpha)k(t,t,\alpha) - (n\pi)^2} [f_n(t) + G(\alpha)\varphi_n(t)K(t,0,\alpha)] + \\ + \int_0^t \left[\frac{1}{G(\alpha)K(t,t,\alpha) - (n\pi)^2} \right] [f_n(z) + G(\alpha)\varphi_n(t)K(z,0,\alpha)] \hat{R}(t,z,\alpha),$$

agar $G(\alpha)k(t,t,\alpha) - (n\pi)^2 \neq 0$ bo'lsa.

Demak, (1) – (3) masalaning yechimi agar $G(\alpha)k(t,t,\alpha) - (n\pi)^2 \neq 0$ bo'lsa,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{G(\alpha)K(t,t,\alpha) - (n\pi)^2} [f_n(t) + G(\alpha)\varphi_n(t)K(t,0,\alpha)] + \right. \\ \left. + \int_0^t \left[\frac{1}{G(\alpha)K(t,t,\alpha) - (n\pi)^2} \right] [f_n(z) + G(\alpha)\varphi_n(t)K(z,0,\alpha)] \hat{R}(t,z,\alpha) \right] \sin n\pi x$$

ko'rinishida, agar $G(\alpha)K(t,t,\alpha) - (n\pi)^2 = 0$ bo'lsa,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\frac{\partial K(t,s,\alpha)}{\partial s} \Big|_{s=t}} \left[-f_n'(t) - G(\alpha) \varphi_n \frac{\partial K(t,0,\alpha)}{\partial s} \right] - \right. \\ \left. - \int_0^t \frac{1}{\frac{\partial K(z,s,\alpha)}{\partial s} \Big|_{s=z}} \left[-f_n'(z) - G(\alpha) \varphi_n \frac{\partial K(z,0,\alpha)}{\partial s} \right] R(t,z,\alpha) dz \right] \sin n\pi x$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Oxirgi ko'rinishdagi yechimlar cheksiz qator ko'rinishida berilgani uchun bu qatorlarning tekis yaqinlashishini isbotlash talab etiladi. Buning uchun biz berilgan funksiyalarga muayyan shartlarni qo'yamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] E.Karimov, S.Pirnafasov. Higher order multi-term time-fractional partial differential equations involving Caputo-Fabrizio derivative. Electronic Journal of Differensial Equations, 2017, No 243, pp.1-11.

INVERSE PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION

Murzambetova M.B.

Nukus State pedagogical Institute, Nukus, Uzbekistan

e-mail: mehri_8282@mail.ru

Numerous publications are devoted to the inverse problems of partial differential equations [1-3]. For example, in [1] authors studied inverse problems for a mixed-type equation with an unknown right-hand side in a rectangular domain. The solution was built using the Fourier method.

Then, in [2], a linear inverse problem for a multidimensional mixed-type equation of the first kind of the second order was studied.

Also in [3], the inverse problem for a fourth-order mixed-type equation with a spectral parameter in a rectangular domain was considered. A criterion for the uniqueness of solution, constructed as the sum of a Fourier series, was established.

This study is devoted to the inverse problem for a mixed type equation with Laplace operator.

Let $\Omega \subset R^n$ be an arbitrary bounded domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, and Δ be the Laplace operator.

Consider the following inverse problem: Find $u(x,t), f(x,t)$ which satisfied the following equation

$$\Delta u(x,t) + \operatorname{sgn} t \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [-T_1, T_2],$$

where $T_1 > 0, T_2 > 0$ are the given real numbers,

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1(x), & t > 0, \\ f_2(x), & t < 0, \end{cases}$$

and the gluing conditions

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_t(x, +0) = u_t(x, -0)$$

also boundary conditions

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [-T_1, T_2]$$

$$u(x, -T_1) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$u(x, T_2) = \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

where $\varphi(x), \psi(x)$ – are the given sufficiently smooth functions.

In this paper, existence and uniqueness of the solution of the posed inverse problem are proved and also considered mixed-type equation with a non-negative elliptic operator.

References

[1] K.B.Sabitov., E.M.Safin. An inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain. News of Universities. Maths. 2010. No. 4. P. 55-62.

[2] S.Z.Dzhamalov., R.R.Ashurov. On a linear inverse problem for a multidimensional mixed type equation of the first kind of the second order, News of Universities. Mat., 2019, No. 6, p. 11-22.

[3] M.B. Murzambetova. An inverse problem for a fourth-order mixed-type equation with a spectral parameter. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2013, No. 2. P. 3-5.

O'ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI BIR O'LCHAMLI YADROLI ISSIQLIK TARQALISH INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALA.

Nuriddinov J. Z., Ochilova Z. Sh.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

e-mail: j.zafarovich@mail.ru

Ushbu ishda quyidagi tenglamalardan $u(x, t)$, $k(t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ funksiyalarni topish masalasi ko'rib chiqilgan:

$$u_t = a(t)u_{xx} - \int_0^t k(\tau)a(\tau)u_{xx}(x, t - \tau)d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad f(0) = \varphi(0), \quad (3)$$

bu yerda $\mathbb{R}_T = \{(x, t) | x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$, $T > 0$. $a(t) > 0$ etarlicha silliq funksiya, $\varphi(x) \in H^{l+8}(\mathbb{R})$ va $f(t) \in H^{l+6, (l+6)/2}(\mathbb{R}_T)$ berilgan funksiyalar [1].

Lemma Agar tayinlangan $T > 0$ lar uchun $\{k(t), r(t)\} \in C[0, T]$ va

$$r(t) = k(t) + \int_0^t k(t - \tau)r(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T],$$

bo'lsin. U holda

$$\varphi(t) = \int_0^t k(t - \tau)\varphi(\tau)d\tau + f(t), \quad f(t) \in C[0, T]$$

integral tenglamaning yechimi

$$\varphi(t) = \int_0^t r(t-\tau)f(\tau)d\tau + f(t).$$

formula bilan ifodalanadi.

(1) integral tenglamaga yuqoridagi Lemmani qo'llash yordamida

$$u_t - a(t)u_{xx} = - \int_0^t r(t-\tau)u_\tau(x,\tau)d\tau \quad (4)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

(4) tenglamada $r(t)$ funksiya $k(t)$ funksiyaning rezolventasi, $r(t)$ va $k(t)$ funksiyalar orasidagi bog'lanish quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$r(t) = k(t) + \int_0^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau. \quad (5)$$

(4), (2), (3) masaladan $u(x,t)$ va $r(t)$ funksiyalarni topish masalasini o'rganganmiz. Qidirilayotgan funksiyalarni topgandan so'ng (5) tenglik yordamida $k(t)$ funksiyaning topish mumkin bo'ladi [2].

Ushbu maqolaning asosiy natijasi sifatida quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema Faraz qilaylik $a(t) > 0$ etarlicha silliq funksiya, $\varphi(x) \in H^{l+8}(\mathbb{R})$, $f(t) \in H^{l+6,(l+6)/2}(\overline{\mathbb{R}_T})$. Funksiyalar sinfiga qarashli bo'lib, $f(0) = \varphi(0)$ va $\varphi''(0) = \frac{1}{a(0)}f_t(0)$ kelishuvchanlik shartlari, hamda $|f_t(0)| > f_0 = \text{const} > 0$ bo'lsin. U holda shunday yetarlicha kichik musbat $T_0 > 0$ soni mavjudki, $T \in (0, T_0]$ lar uchun (1)–(3) teskari masalaning $u(x,t) \in H^{l+2,(l+2)/2}(\overline{\mathbb{R}_T})$, $h(t) \in H^{l,l/2}(\overline{\mathbb{R}_T})$, $l \in (0,1)$ sinfga tegishli yechimi mavjud.

Ushbu teoremani isbotlashda qisqartirib akslantirishlar prinsipidan foydalanilgan [3].

ADABIYOTLAR RO'YXATI

[1] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. // Москва: Наука, 1967;

[2] Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная Задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа// Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 110-116.

[3] Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., Determination of a Multidimensional Kernel in Some Parabolic Integro-differential Equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics physics 2021, 14(1), 117-127.

O'ZGARUVCHAN KOEFFITSIYENTLI PARABOLIK TIPDAGI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA YADROSINING YAGONALIGI TO'G'RISIDA

Nuriddinov J. Z., Primov J. F.

Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston

e-mail: j.zafarovich@mail.ru

Ushbu maqolada ko'p o'lchamli issiqlik o'tkazuvchanlik integro-differensial tenglamasi uchun Koshi masalasini qaraymiz.

$$u_t - a(t)\Delta_x u = \int_0^t k(x, t-\tau)u(x, y, \tau)d\tau, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

Bu yerda $\Delta_x = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – Laplas operatori, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ parametr, T -
 tayinlangan musbat o'zgaruvchi son va $a(t) > 0$ yetarlicha silliq funksiya. (1), (2)
 masalaning yechimi $x = y$ da ma'lum bo'lib,

$$u|_{x=y} = f(y, t), \quad (3)$$

bo'lsa, (1) tenglamaning integral hadidagi $k(x, t)$ (yadro)ni topish masalasini
 qaraymiz. Bu yerda barcha $y \in \mathbb{R}^2$ va $t \in [0, T]$ larda $f(y, t)$ – berilgan funksiya
 [1],[2].

Birinchi integral tenglamaning yadrosi $k(x, t)$ quyidagi ko'rinishga ega
 bo'lsin:

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^N c_i(x) b_i(t).$$

Faraz qilaylik $k(x, t)$ va uning $k_{x_i}, k_t, i = 1, 2$ hosilalari ixtiyoriy $T > 0$ da
 $B(D_T)$, $[D_T := \{(x, t): x \in \mathbb{R}^2; 0 \leq t \leq T\}]$ sinfga qarashli, $\varphi(x; y) \in B^4(\mathbb{R}^2 \times$
 $\mathbb{R}^2)$.

(1) va (2) Koshi masalasining yechimi Volterra tipidagi integral tenglamaga
 ekvivalent bo'ladi. Buning uchun quyidagi formuladan foydalanamiz [3]:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) G(x - \xi; \theta(t)) d\xi + \\ + \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi, \theta^{-1}(\tau)) G(x - \xi; \theta(t) - \tau) d\xi. \quad (4)$$

Bu yerda $\theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$ va $\theta^{-1}(t)$ funksiya $\theta(t)$ funksiyaning teskari
 funksiyasi. $G(x - \xi; \theta(t) - \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(\theta(t) - \tau)})^n} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(\theta(t) - \tau)}}$ esa $\frac{\partial}{\partial t} - a(t)\Delta$
 o'zgaruvchan koeffitsiyentli differensial operatorining fundamental yechimi bo'lib,
 bu yerda $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_n, |x|^2 =$
 $x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Ushbu maqolaning asosiy natijasi quyidagi yagonalik teoremasidan iborat.

Teorema Faraz qilaylik $(t) \in C^1[0, T]$, $\varphi(x, y) \in B^4(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, $f(y, t) \in$
 $B^{2,2}(D_T)$, $T > 0$ bo'lib, $\varphi(y, y) = f(y, 0)$, $a(0)\Delta_x \operatorname{div}_y \varphi(y, y) = \operatorname{div}_y f_t(y, 0)$
 kelishuvchanlik shartlari hamda

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} |\varphi(x, y)| \geq \beta_0 > 0,$$

shart bajarilsin, bu yerda β_0 – ma'lum son. U holda, (1)-(3) teskari masalaning

$$k(x, t) = \sum_{i=0}^N c_i(x) b_i(t), \quad c_i(x) \in B^2(\mathbb{R}^2), b_i(t) \in C^1([0, T])$$

ko'rinishdagi yadrosi D_T sohada bir qiymatli aniqlangan.

Teoremani isbotlashda dastlab berilgan masalaga yordamchi masalalar
 olinadi. Yordamchi masalalarning yechimlari (4) formula yordamida Volterra
 tipidagi ikkinchi tur integral tenglamalarga ekvivalentligi ko'rsatiladi. Hosil

qilingan integral tenglamalarni baholash uchun quyidagi normalardan foydalanamiz:

$$-\|h_1\| := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |h_1(x,y)| \text{ funksiya } (x,y) \text{ o'zgaruvchiga bog'liq}$$

$$-\|h_2\|_T := \sup_{(x,t) \in D(T)} |h_2(x,t)| \text{ funksiya, } (x,t) \text{ o'zgaruvchiga bog'liq}$$

$$-\|h_3\|^T := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in D(T)} |h_2(x,y,t)| \text{ funksiya } (x,y,t) \text{ o'zgaruvchiga bog'liq}$$

$$\bar{K}_0(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar{k}(x,t)|, \bar{\vartheta}_0(t) := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\bar{\vartheta}(x,y,t)|, \bar{\vartheta}_0^{(1)}(t) :=$$

$$:= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t)|,$$

$$\bar{\omega}_0(t) := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |\bar{\omega}(x,y,t)|, |\bar{k}_x(x,t)| \leq K_{00} \bar{K}_0(t)$$

Gronoulla–Bellman tengsizligidan foydalanib uning yagonaligini isbotlaymiz.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

[1] Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная Задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа// Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 110-116.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Москва: Наука 1976;

[3] Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z., On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal Conductivity // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. 2020, vol. 30, issue 4, pp. 572-584

IKKINCHI TUR BUZILADIGAN GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN KOSHI-GURSA MASALASI

¹Oqboyev A. B., ²Axmedova M. B.

¹ V.I. Romanovskiy nomidaagi Matematika instituti Namangan bo'linmasi, Namangan, O'zbekiston

² Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston

e-mail: akmaljon12012@gmail.com, mirjalol9966@mail.ru

Ushbu

$$L_\alpha(u) \equiv u_{xx} - yu_{yy} - \alpha u_y = 0, \quad y > 0 \quad (1)$$

tenglamani o'zining xarakteristiklari $OC: x - 2\sqrt{y} = 0, 0 \leq x \leq 1/2, y > 0;$
 $CB: x + 2\sqrt{y} = 1, 1/2 \leq x \leq 1, y > 0,$ bilan chegaralangan sohada qaraymiz, bu yerda $\alpha \in (-1/2, 0)$. $OB: y = 0$ chiziq (1) tenglamaing bir vaqtda buzilish chizig'i va xarakteristik chizig'i hisoblanadi. OC, CB, OB xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan sohani D bilan belgilaymiz.

Koshi –Gursa masalasi. D sohada (1) tenglamaning

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha \frac{\partial}{\partial y} [u - A_\alpha^+(\tau)] = v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{OC} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2 \quad (3)$$

shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x, y) \in C(\bar{D})$ yechimini toping, bu yerda $v(x)$ va $\varphi(x)$ –berilgan uzliksiz funksiyalar bo'lib $\varphi^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2$,

$$A_\alpha^+(\tau) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(s) [z(1-z)]^\beta dz + \frac{4\gamma_1 y}{(\beta+1/2)(\beta+1)} \int_0^1 \tau''(s) [z(1-z)]^{1+\beta} dz$$

funksiya esa [1] x, y ning funksiyasi, $\gamma_1 = \Gamma(1+2\alpha)/\Gamma^2(1/2+\alpha)$, $\beta = \alpha - 1/2$, $\tau(x) = u(x, 0) \in C^3[0, 1], s = x - 2\sqrt{y}(1-2z)$.

(1) tenglama uchun

$$u(x, y)|_{y=0} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha (\partial / \partial y) [u - A_\alpha^+(\tau)] = v(x), \quad 0 < x < 1$$

boshlang'ich shartlar bilan qo'yilgan ko'rinishi o'zgargan Koshi masalasi yechimi

$$u(x, y) = A_\alpha^+(\tau) - \gamma_2 y^{1-\alpha} \int_0^1 v(s) [z(1-z)]^{-\beta} dz \quad (4)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $\tau(x) \in C^3[0, 1], \tau^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, v(x) \in C^1[0, 1]$

(4) yechimni (3) shartga bo'ysindirib, ba'zi almashtirishlarni bajarib,

$$\begin{aligned} & \Gamma(2+2\beta) D_{0x}^{\beta-1} [x^{-\beta} D_{0x}^{-2-2\beta} \tau'''(x)] + \\ & + \gamma_3 \gamma_2 4^{-1+2\beta} D_{0x}^{\beta-1} [x^{-\beta} v(x)] = \frac{\gamma_3}{\Gamma(1-\beta)} \varphi(x/2), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

tenglamani olamiz, bu yerda $\gamma_3 = 4(\beta+1/2)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)$, $D_{0x}^\alpha \varphi(x)$ kasr tartibli

$$D_{0x}^\alpha \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ \varphi(x), & \alpha = 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} \varphi(x), & \alpha > 0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi integro-differensial operator.

(5) tenglamaga $D_{0x}^{2+2\beta} x^\beta D_{0x}^{-\beta+1}$ ni ta'sir qildirib

$$\tau'''(x) = \frac{\gamma_3}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2+2\beta)} D_{0x}^{2+2\beta} x^\beta D_{0x}^{-\beta+1} [\varphi(x/2)] -$$

$$-\frac{\gamma_3 \gamma_2 4^{-1+2\beta}}{\Gamma(2+2\beta)} D_{0x}^{2+2\beta} v(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

ga ega bo'lamiz. $\tau(x) \in C^3[0,1]$, $\tau^{(k)}(0) = 0$, $k = 0,1,2$ ni e'tiborga olsak

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{\gamma_3}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2+2\beta)} D_{0x}^{-1+2\beta} \left\{ x^\beta D_{0x}^{-\beta+1} [\varphi(x/2)] - \right. \\ & \left. - \Gamma(1-\beta) \gamma_2 4^{-1+2\beta} v(x) \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

ga ega bo'lamiz. (6) tenglik bilan topilgan $\tau(x)$ funksiyani (4) funksiyaga qo'yib, Koshi-Gursa masalasining yechimini topamiz.

Masala yechimining yagonaligi (1) tenglama uchun qo'yilgan ko'rinishi o'zgargan Koshi masalasi yechimining yagonaligi [2, 3], hamda masalaning tadqiq qilish usulidan bevosita kelib chiqadi.

Shunday qilib ushbu teorema isbotlandi.

Teorema. Agar $\varphi(x) \in C^3[0,1/2]$, $\varphi^{(k)}(0) = \tau^{(k)}(0) = 0$, $k = 0,1,2$ va $v(x) \in C^1[0,1]$ bo'lsa, u holda Koshi-Gursa masalasi yagona yechimga ega bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Окбоев А.Б., Ахмедова М.Б. Краевая задача для уравнения гиперболического типа второго рода // Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics: international scientific conference (September 23-24, 2022 y. Samarkand). P-287

[2] Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // Сибирский математический журнал. 1961. Т.2. №6. – С. 913-935.

[3] С.С.Исамухамедов. О краевой задаче для одного уравнения смешанного типа второго рода. Сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений», 5, Ташкент, Изд-во «Фан» 1975. с. 28-37.

UCHINCHI TARTIBLI INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI

¹ Oqboyev A. B., ² Abdusattarov O. A.

¹ V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Namangan bo'linmasi,
Namangan, O'zbekiston

² Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston
e-mail: akmaljon12012@gmail.com, Oxunjon1252@gmail.com

Quyidagi

$$\tau'''(x) + \frac{1}{2(\beta+1/2)(\beta+1)} \int_0^x \tau''(t) [t(x-t)]^{1+\beta} dz +$$

$$+\int_0^x \tau(t) [t(x-t)]^\beta dt = f(x), \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

tenglamani qaraylik, bu yerda $\beta \in (-1, -1/2)$, $f(x)$ - berilgan funksiya. (1) tenglama uchun quyidagi masalani qaraymiz:

Koshi masalasi. (1) tenglamani hamda

$$\tau^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$ funksiya topilsin.

Koshi masalasining yechilishi. $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$ funksiya (2)

shartni qanoatlantirishidan foydalanib ushbu

$$\tau(x) = \int_0^x (x-s)^2 \tau'''(s) ds \quad (3)$$

tenglikni yozib olamiz. (3) ni (1) ga qo'yib va hosil bo'lgan integrallarda integrallash tartibini o'zgartirib

$$\begin{aligned} \tau'''(x) + \int_0^x \tau'''(s) ds \int_s^x (x-t)^\beta (t-s)^2 t^\beta dt + \\ + \frac{1}{2(\beta+1/2)(\beta+1)} \int_0^x \tau'''(s) ds \int_s^x [t(x-t)]^{1+\beta} dt = f(x) \end{aligned} \quad (4)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $F(a,b;c;z)$ Gauss gipergeometrik funksiya'sining ma'lum integral [1] ifodasidan foydalanib

$$\begin{aligned} \int_z^x (x-t)^a (t-z)^b (t-s)^c dt = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \times \\ \times (x-z)^{a+b+1} (x-s)^c F\left(a+1, -c; a+b+2; \frac{x-z}{x-s}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

ni osongina hosil qilamiz. (5) ni (4) ga qo'yib, ushbu

$$\begin{aligned} \frac{z}{\beta+3} F(\beta+1, -\beta, \beta+4; z) + \frac{1}{2(2\beta+1)} F(\beta+2, -\beta-1, \beta+3; z) = \\ = \frac{1}{2(2\beta+1)} F(\beta, 1-\beta, \beta+3; z) \end{aligned}$$

ayniyatdan foydalansak

$$\tau'''(x) + \gamma \int_0^x (x-s)^{\beta+2} F\left(1-\beta, \beta, 3+\beta; \frac{x-s}{x}\right) \tau'''(s) ds = f(x) \quad (6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerda $\gamma = [(2\beta+1)(\beta+1)(\beta+2)]^{-1}$.

Shunday qilib qo'yilgan {(1), (2)} masala (6) ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga ekvivalent keltirildi. Agar $f(x) \in C[0,1]$ bo'lsa, (6) tenglama yagona yechimga ega bo'ladi [2].

Quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Agar $f(x) \in C[0,1]$ bo'lsa, $\{(1), (2)\}$ masala yagona yechimga bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. Дополнительные главы. -2-е изд., исправ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 668 с.

[2] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.

CONDITIONS OF CONTROLLABILITY AN ENSEMBLE OF TRAJECTORIES OF DIFFERENTIAL INCLUSION

¹Otakulov S., ²Rahimov B.Sh.

¹Jizzakh Polytechnic Institute,

²Jizzakh Polytechnic Institute, Uzbekistan

e-mail: otakulov52@mail.ru, raximovboyxoroz@gmail.com

1. Introduction. Differential inclusions have important applications in the mathematical theory of optimal control, in the theory of differential equations with discontinuous right-hand sides, in differential games, in models of economic dynamics, and in other fields [1,2,3]. In studies of models of control systems under conditions of uncertainty, differential inclusions with control parameters are used as an effective mathematical apparatus [3,4].

The problem of controllability is important for each model of a dynamic control system. Some statements of controllability problems for differential inclusions, understood as controllability of an ensemble of trajectories with respect to given initial and terminal states, were considered in [1,5,6]. Here, of great theoretical interest are the necessary and sufficient conditions for controllability.

2. Statement of the problem. Consider a controlled differential inclusion

$$\dot{x} \in F(t, x, u), t \geq t_0, \quad (1)$$

where $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x \in R^n$, $F(t, x, u) \subset R^n$, $u \in R^m$. By an admissible control for system

(1) we mean a measurable bounded m -vector function $u = u(t)$ defined on a certain interval $T = [t_0, t_1]$ of time. Denote $U_T(L)$ - the set of all admissible controls $u(t), t \in T$, with values from a closed ball $S_L = \{v \in R^m : \|v\| \leq L\}$. We denote by $H_T(u, x^0)$ the set of absolutely continuous solutions $x = x(t), t \in T$, differential inclusion (1) corresponding to the control $u \in U_T(L)$ and the initial condition $x(t_0) = x^0 \in R^n$. Consider the set

$X_T(t, u, x^0) = \{\xi \in R^n : \xi = x(t), x(\cdot) \in H_T(u, x^0)\}$. We consider the controllability problem for differential inclusion (1) in the sense of complete immersion of the

ensemble of trajectories on a given a convex closed terminal set $Y = Y(t) \subset R^n$, $t \geq t_0$.

Definition. We say that the ensemble of trajectories of system (1) is controllable from the initial state $x^0 \notin Y(t_0)$ to the set of terminal states $Y = Y(t)$ (system (1) is (x^0, Y) - controllable) if there exist is an admissible control $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ such that the corresponding ensemble of trajectories satisfies the boundary condition

$$X_T(t_1, u, x^0) \subset Y(t_1). \quad (2)$$

From definition it is clear that (x^0, Y) – the controllability of the system (1) means the solvability of the boundary value problem (1) - (2) in the class of admissible controls $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$.

3. The main results. Let $F(t, x, y, u) = A(t)x + b(t, u)$, i.e. consider the following differential inclusion:

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + b(t, u(t)). \quad (3)$$

Assumption 1. 1) elements of $n \times n$ -matrix $A(t)$ are summable on any $T = [t_0, t_1] \subset T_\infty$; 2) for any $(t, u) \in T_\infty \times R^m$, the set $b(t, u)$ is a compact from R^n ; 3) the multi-valued mapping $(t, u) \rightarrow b(t, u)$ is measurable in $t \in T_\infty$ and continuous in $u \in R^m$, moreover, $\|\xi\| \leq \beta_1(t)\|u\| + \beta_2(t)$, $\forall \xi \in b(t, u)$, $(t, u) \in T_\infty \times R^m$, where $\beta_i(\cdot)$, $i=1, 2$, are functions summable on any interval $T \subset T_\infty$; 4) the support function $C(b(t, u), \psi) = \max\{(\xi, \psi) : \xi \in b(t, u)\}$ is convex in $u \in V$ for almost all $t \in T_\infty$.

The following representation of the ensemble of trajectories of system (3) is valid through its parameters [4,6]:

$$X_T(t, u, \phi^0) = F(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t F(t, \tau)b(\tau, u(\tau))d\tau,$$

where $F(t, \tau) - n \times n$ is a matrix function satisfying the equation

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau)A(\tau), \tau \leq t, F(t, t) = E.$$

Theorem 1. For (x^0, Y) - controllability of system (3) it is necessary and sufficient that there exists $t_1 > t_0$ such that

$$\sup_{\|\psi\|=1} \{ (F(t_1, t_0)x^0, \psi) + \inf_{u \in U_T(t_1)} \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t)), \psi) - C(Y(t_1), \psi) \right] \} \leq 0$$

where $\overline{\text{conc}} f$ is the concave closure of the function f .

Let in (3) $b(t,u) = B(t)u + Q(t)$, i.e. we consider a linear differential inclusion

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + B(t)u(t) + Q(t) \quad (4)$$

Assumption 2. 1) elements of $n \times m$ -matrix $B(t)$ are summable on any $T = [t_0, t_1] \subset T_\infty$; 2) $Q(t)$ – convex closed and bounded subsets R^n ; 3) the multi-valued mapping $t \rightarrow Q(t)$, $t \geq t_0$ is measurable.

We introduce the notation: $P(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau)Q(\tau)d\tau$, $t > t_0$, $p^0(t) = F(t, t_0)x^0$.

Theorem 2. *The ensemble of trajectories of system (3) is (x^0, Y) - controllable if and only if relation*

$$\inf_{\|\psi\|=1} \{L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)*P(t_1), \psi) - (p^0(t_1), \psi)\} \geq 0.$$

holds, where $t_1 > t_0$ and $L > 0$.

4. Conclusion. Here, for a controlled differential inclusion, the controllability problem was considered as the problem of the complete immersion of an ensemble of trajectories on a given terminal set. Of the results obtained, the most general is Theorem 1. Theorem 2 gives necessary and sufficient conditions for “point” (x^0, Y) - controllability of the ensemble of trajectories linear in state of system (4). These results generalize the known controllability conditions of linear systems to the considered model of a dynamic control system.

References

- [1] Blagodatskikh V.I, Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control, Trudy Mat. Inst, AN SSSR, vol.169 (1985). pp. 194-252.
- [2] Plotnikov A.B. The controlled kvazidifferential equations and its some property, Differens. Uravneniya, vol. № 10 (1998). pp. 1332-1336.
- [3] Poloninkin E.S. Set-valued analysis and differential inclusions, Fizmatlit, Moskow (2014).
- [4] Otakulov S. The control problem by ensemble of trajectories for differential inclusions, Lambert Academic Publishing, (2019).
- [5] Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About conditions of controllability of ensamble trajectories of differential inclusion with delay. International Journal of Statistics and Applied Mathematics, v.5, issue 3 (2020).–p.59–65.
- [6] Otakulov S., Rahimov B. Sh. Haydarov T.T. On the property of relative controllability for the model of dynamic system with mobile terminal set. AIP Conference Proceedings, 2432, 030062 (2022). -p. 1–5.

ELLIPTIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN QO'YILGAN KOSHI MASALASI YECHIMINING YAGONALIGI HAQIDA

Qudaybergenov A.K., Qoraqulov A., Sharipova S.A.
O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston
email: khudaybergenovallambergen@mail.ru¹,

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fazo uchun silliq $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ funksiyani qaraymiz

$$g(x) > 0, \quad x \in \Omega$$

va

$$g(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

Shuningdek faraz qilaylik,

$$\max_{\xi \in \Omega} g(\xi) \leq \pi.$$

Tayinlaymiz

$$G = \{(x, t) \in \Omega \times (0, \pi) : 0 < t < g(x), x \in \Omega\}$$

va

$$\Gamma = \{(x, t) \in \partial G : t = g(x), x \in \Omega\}.$$

Quyidagicha o'z-o'ziga qoshma bolgan formal elliptik operatorni qaraylik

$$A(x, D)u(x) = - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{jk}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right] + c(x)u(x). \quad (1)$$

Tayinlaymiz

$$L \equiv L\left(x, D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + A(x, D). \quad (2)$$

Aytaylik $N(x, t)$ vektor $(x, t) \in \Gamma$ nuqtada Γ betga o'tkazilgan tashqi normal vektor:

$$N(x, t) = (\cos \alpha_1(x, t), \cos \alpha_2(x, t), \dots, \cos \alpha_n(x, t), \cos \alpha_{n+1}(x, t)).$$

Tayinlaymiz

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos \alpha_j(x, t) + \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} \cos \alpha_{n+1}(x, t) \quad (3)$$

Quyidagi ikki Koshi masalasini qaraymiz

Masala A

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (4)$$

$$u(x, t) = \phi, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma. \quad (5)$$

Masala B

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (x, t) \in \Gamma. \quad (7)$$

Har qanday $u \in W_2^1(G)$ va $v \in W_2^1(G)$ uchun

$$Q(u, v) = \int_G \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + c(x) u(x, t) v(x, t) \right] dx dt.$$

Aytmalik $C^\infty(G \cup \Gamma)$ $f \in C^\infty(\bar{G})$ funksiyalar fazosi bo'lsin, shuningdek $\text{supp} f \subset G \cup \Gamma$.

$H^1(G \cup \Gamma)$ orqali $C^\infty(G \cup \Gamma)$ fazoning $W_2^1(G)$ dagi yopig'ini belgilaylik. Demak aniqlanishiga ko'ra, har bir $v \in H^1(G \cup \Gamma)$ funksiya ∂G chegarada nolga aynaladi.

Teorema 1. (4)-(5) Koshi masalasi bittadan ko'p yechimga ega bo'la olmaydi.

Teorema 2. (6)-(7) Koshi masalasi bittadan ko'p yechimga ega bo'la olmaydi.

Adabiyotlar

[1] R. Courant, Methods of Mathematical Physics, Vol. 2, Partial Differential Equations, 1962, Interscience, NY-London.

[2] L. Hörmander, On the uniqueness of the Cauchy problem (I), Math. Scand., 6 (1958), 213-225, (II), Math. Scand., 7 (1958), 177-190.

[3] S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations (Teoriya uravneniy s chastnymi proizvodnymi, Russian), Mir, Moscow, 1977.

AWISPALI ARGUMENTKE IYE BAZI-BIR SIZIQLI DIFFERENCIALLIQ TEN'LEMELER

Qurbanbaev Ó. O.

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, Nókis, Ózbekistan
e-mail: Otebay58@mail.ru

Awıspalı argumentke iye differenciallıq ten'lemeler turmista ushırasatugın kópshilik máselelerdi matematikalıq modellestiriw waqtında payda bolıp, bul baǵdar boyınsha alıp barılıp atırǵan kóplegen ilimiy jumislardı ushıratıwǵa boladı [1,2].

Bul maqalada awıspalı argumentke iye bazı-bir turaqlı koefficientli sızıqlı differenciallıq ten'leme qarastırılıp, bunda qarastırılıp atırǵan ten'lemeni sheshiwdiń ayırım bir usılı bayan etiledi.

Meyli awıspalı argumentke iye turaqlı koefficientli sızıqlı birtekli emes

$$\sum_{k=0}^n (a_k x^{(n-k)}(t) + b_k x^{(n-k)}(-t)) = f(t) \quad (1)$$

differenciallıq ten'lemeni qarastırayıq, bul jerde $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, n$ koefficientleri haqıyqıy sanlar, $f(t)$ funkciyası bolsa, bazı-bir simmetriyalı $(-l, l)$ aralıqta anıqlanǵan úzliksiz funkciya.

Meyli (1) ten'lemeniń $a_k, b_k, k = 0, 1, \dots, n$ koefficientleri ushın, awıspalı argumentke iye bolmaǵan

$$\sum_{k=0}^n c_k u^{(n-k)}(t) = f_1(t) \quad (2)$$

teńlemesiniń ulıwma sheshimi arasınan usı teńlemenı qanaatlandıratuǵın jup funkciyadan ibarat $u = u(t)$ sheshim, al

$$\sum_{k=0}^n d_k \mathcal{G}^{(n-k)}(t) = f_2(t) \quad (3)$$

teńlemesiniń ulıwma sheshimi arasınan usı teńlemenı qanaatlandıratuǵın taq funkciyadan ibarat $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$ sheshim bar bolsın, bul jerde $c_k = a_k + b_k$, $d_k = a_k - b_k$ hám $f_1(t) = f(t) + f(-t)$, $f_2(t) = f(t) - f(-t)$.

Onda $x(t) = \frac{1}{2}(u(t) + \mathcal{G}(t))$ formulası menen anıqlanatuǵın $x(t)$

funkciyası (1) teńlemenı qanaatlandıradı.

Mısal ushın

$$2x''(t) + x''(-t) + x(t) + 2x(-t) = t^2 + t$$

teńlemesin qarastıratuǵın bolsaq, onda (2) hám (3) teńlemeler sáykes

$$u''(t) + u(t) = \frac{2}{3}t^2,$$

hám

$$\mathcal{G}''(t) - \mathcal{G}(t) = 2t$$

kórinislerge iye bolıp, bul teńlemeler sáykes $u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}$ hám

$\mathcal{G}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2t$ túrindegi ulıwma sheshimlerge iye. Bul sheshimlerden

$u(t) = c_1 \cos t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}$ hám $\mathcal{G}(t) = c_2(e^t - e^{-t}) - 2t$ kórinistegi sáykes jup hám taq

funkciyalardan ibarat sheshimlerdi ajıratıp alsaq, onda berilgen teńleme ushın

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{3}t^2 - t - \frac{2}{3}$$

kórinistegi ulıwma sheshimge iye bolamız.

Ádebiyatlar

[1] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука. 1965.

[2] Курбанбаев О.О. Решение некоторых линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2022): материалы Международной научной конференции. Новополюцк 2022.

IKKINCHI TUR BUZILADIGAN GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN BOSHLANG'ICH SHARTLI MASALA

Rashidxon uulu Atabek

Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston

e-mail: atabekrashidxanugli@gmail.com

Ushbu

$$L_{-3/2}(U) \equiv U_{xx} + yU_{yy} - \frac{3}{2}U_y = 0 \quad (1)$$

tenglamani $OB: x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AB: x + 2\sqrt{-y} = 1$ va $OA: y = 0$ xarakteristikalar bilan chegaralangan D sohada qaraylik.

Masala (Koshi tipidagi masala). D sohada (1) tenglamani va ushbu

$$U(x, 0) = \tau(x), x \in [0, 1]; \lim_{y \rightarrow -0} \sqrt{-y} (\partial^3 / \partial y^3) U = \nu(x), x \in (0, 1) \quad (2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D \cup I) \cap C_{x,y}^{2,3}(D)$ funksiya topilsin, bu yerda $I = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $\tau(x)$ va $\nu(x)$ - berilgan uzluksiz funksiyalar.

Teorema. Agar $\tau(x) \in C^5[0, 1]$ va $\nu(x) \in C^2[0, 1]$ bo'lsa,

$$U(x, y) = \frac{1}{24} \sum_{k=0}^2 \frac{(4-k)! 2^{2k} (-y)^{k/2}}{k!(2-k)!} \left[\tau^{(k)}(x - 2\sqrt{-y}) + (-1)^k \tau^{(k)}(x + 2\sqrt{-y}) \right] + \\ + \frac{(-y)^{5/2}}{30} \int_0^1 \nu \left[x - 2\sqrt{-y}(1-2z) \right] [z(1-z)]^2 dz$$

funksiya $\{(1), (2)\}$ masalaning yagona yechimi bo'ladi.

Masala yechimini topishda (1) teglamaning umimiy yechimidan [1] foydalanib topilgan. Masala yechimining yagonaligini isbotlashda masala yechimi qidirilayotgan funksiyalar sinfining xususiyatlaridan foydalanib, Riman usulida isbotlangan.

Adabiyotlar

[1] Крикунов Ю.М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$ // Известия вузов. Математика. 1979. №9 (208). – С. 21–28.

ONA VEYLETNI QURUSH.

Raxmonov X. B.

O'zbekiston Milliy universiteti

e-mail: xumoyunraxmonov01@gmail.com

Ortogonal funksiyalar yordamida matematik fizikaning zamonaviy masalalarini yechish J. Fourierning chegaralangan sterjinda issiqlik tarqalishi masalasini o'rganishidan boshlangan. Bugungi kunda Fourier qatorlari va Fourier integrallari yordamida masalalarni yechish klassik usullardan hisoblanadi. O'z

navbatida bu izlanishlar differensial operatorlarning spektral nazariyasiga asos solgan va qisqa qilib aytganda Fourier analizining usullari deb ataladi. Fourier analizi nafaqat masalalarning yechimini topishda balki signallarni tahlil qilishda qulay usul hisoblanadi. Lekin bu usulni kamchiligi shuki tahlil global masshtabda olib boriladi. Signallarni lokallashtirish uchun esa veyletlar qo'llanadi. Veyletlar tasvirlarni tanib olish masalalarida, turli signallarni qayta ishlash va sintez qilishda, kristallar va nano obektlarni organishda juda effektiv vosita ekanini amalda ko'rsatdi. Hozirgi vaqtda veyletlarning juda ko'p turlari mavjud. Veyletlarni qurish prinsiplari umumiy bolib ular "ona veyletlarni qurishdan boshlanadi va Gilbert fazolariga orthogonal sistemalarning hossalariga tayanadi. Ushbu tezisda "ona veylet"larni qurishning asossiy teoremasi muhokama qilingan. Bu teorema har qanday veyletlarni qurishda asosiy natija hisoblanadi.

Biz $\psi(t)$. "ona veylet"ni shakllantirish uchun imkoniyati beruvchi $L^2(R)$ fazoda $\{\psi(t-n), n \in Z\}$ ortonormal bazisni joylashuvini aniqlaymiz. Eslatib o'tamiz, "ona veylet" $\psi(t) = \psi_{0,0}(t)$ masshtablash funktsiyasining keyingi quyi fazosi bilan qoplangan V_1 fazoda joylashgan W_0 , ya'ni $W_0 \subset V_1$. Demak, $\psi(t)$ funktsiyani $\phi(2t)$ funktsiyasining og'irlashtirilgan va o'zgartirilgan masshtablash yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi mumkin:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n \sqrt{2} \phi(2t-n), \quad n \in Z. \quad (1)$$

kengayish koeffitsientlari q_n , **veyletli koeffitsientlar** deb ataladi va quyidagi ko'rinishda beriladi.

$$q_n = (-1)^{n-1} p_{-n-1} \quad (2)$$

Teorema . Agar $\{V_m\}$ ko'p o'lchamli tahlil bo'lsa $\phi(t)$ masshtablash funktsiyasi, ona veylet $\psi(t)$ tomonidan beriladi:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1} p_{-n-1} \phi(2t-n), \quad n \in Z, \quad (3)$$

bu yerda $\phi(t)$ ning masshtablash funktsiyasi koeffitsienti $p_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi_{1,n}(t) dt$ hisoblanadi.

Lemma 1. $\phi(t)$ masshtablash funktsiyasining $\Phi(\omega)$ furye almashtirishlari qanoatlantiradi $\Phi(\omega) = M\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, bu yerda, $M(\omega)$ belgilanadigan ko'p o'lchamli tahlilning ishlab chiqaruvchi funktsiyasi va p_n koeffitsienti $\phi(t)$ masshtablash funktsiyasiga tegishli.

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{-in\omega} \quad (4)$$

Lemma 2. Har qanday $f \in W_0$ funksiyaning $F(\omega)$ furye almashtirishi quyidagicha ifodalanishi mumkin

$$F(\omega) = V(\omega) e^{\frac{i\omega}{2}} M^* \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad (5)$$

bu yerda $V(\omega)$ - 2π davrli funksiya, ya'ni $V(\omega) = V(\omega + 2\pi)$.

Isbot 1. $\psi(t)$ ona veyletli W_0 fazo uchun $\{\psi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal bazis berganligi sababli, har qanday funktsiya $f \in W_0$ tegishli h_n koeffitsientlar bilan ifodalanishi mumkin $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \psi(t-n)$. Uning $F(\omega)$ furye almashitirishi:

$F(\omega) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-in\omega} \right) \Psi(\omega)$, bu yerda qavs ichidagi yig'indi 2π - davriydir. Buni (5) bilan taqqoslab

$$\Psi(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}} M^* \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \Phi \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad (6)$$

ifodani hosil qilamiz va (4), (6) ifodalar orqali quyidacha tenglikka ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \frac{e^{\frac{i\omega}{2}}}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in[\frac{\omega}{2} + \pi]} \Psi \left(\frac{\omega}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\pi} e^{i(n+1)\frac{\omega}{2}} \Psi \left(\frac{\omega}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{-k-1} (-1)^{k-1} e^{\frac{-ik\omega}{2}} \Psi \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad [k \equiv -n-1]. \end{aligned}$$

Topish uchun ikkala tomonning teskari Furye almashtirishini olamiz

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{-k-1} (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ik\omega}{2}} e^{i\omega t} \Psi \left(\frac{\omega}{2} \right) d\omega = \left[\omega' \equiv \frac{\omega}{2} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{-k-1} (-1)^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'(2t-k)} \Psi(\omega') d\omega' = \frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{-k-1} (-1)^{k-1} \phi(2t-k). \end{aligned}$$

bu biz xohlagan (3) natija.

ADABIYOTLAR

- [1] Boggess, A., Narcowich, F.J. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis.
- [2] Beylkin, G. On wavelet-based algorithms for solving differential equations.
- [3] Bryson, A.E., Ho, Y.C. Applied Optimal Control, Optimization, Estimation and Control. Hemisphere, Washington (1975).

THE PROBLEM OF l -APPROACH IN NON-STATIONARY GEOMETRIC CONSTRAINTS DIFFERENTIAL GAME.

¹*Samatov B. T.,* ²*Turgunboeva M. A.*

¹*V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

²*Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

email: samatov57@gmail.com , turgunboyevamohisanam95@gmail.com

We will consider the differential game which includes two players P (Pursuer) and E (Evader) whose state vectors are x and y , and whose velocity vectors are u and v , respectively in the space $\mathbb{R}^n$. Let, in this consideration, the motion dynamics of P and E be described by the differential equations

$$(1) \quad P: \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0,$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0 \quad (2)$$

correspondingly, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial states of the players for which it is presumed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$; the velocity vectors u and v act as control parameters of the players respectively, and they depend on time $t \geq 0$.

The controls u and v are regarded as measurable functions $u(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $v(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ accordingly, and they are subject to the constraints

$$(3) \quad |u(t)| \leq \rho a^{-kt} + a^{kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

$$(4) \quad |v(t)| \leq \sigma a^{-kt} + a^{kt} \quad \text{for almost every } t \geq 0,$$

where ρ, σ, k are the given positive parametric numbers. Let $U_\rho^{a,k}$ stand for the family of all measurable functions corresponding to (3). Similarly, let the family of all measurable functions satisfying (4) be represented by $V_\sigma^{a,k}$.

If $u(\cdot) \in U_\rho^{a,k}$ and $v(\cdot) \in V_\sigma^{a,k}$, then the solutions to Cauchy's problems (1) and (2) are

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds$$

and the pairs $(x_0, u(\cdot))$ and generate the motion trajectories of the player P and E appropriately.

The main target of the player P is to gain ground the player E at the distance $l > 0$ (l -approach problem), i.e., to achieve the relation

$$(5) \quad |x(\theta) - y(\theta)| \leq l$$

at some finite time $\theta > 0$. Whereas the objective of the player E is to avoid the occurrence of (5), i.e., to keep the inequality $|x(t) - y(t)| > l$ for all $t \geq 0$ or, if it is impossible, to put off the time of the occurred of (5).

We will introduce the following denotations for the sake of convenience:

$$z(t) = x - y, \quad z_0 = x_0 - y_0.$$

And we come to the unique Cauchy problem $\dot{z} = u - v, \quad z(0) = z_0$. (6)

Now we define a strategy for P on the basis of the works [1, p-31-38; 2;].

Definition 1. [4, p-907-921] For $\rho \geq \sigma$, we call the function

$$u(z_0, t, v) = v + \lambda(z_0, t, v)(m(z_0, t, v) - z_0) \quad (7)$$

the l -approach strategy or Π_l -strategy for P in the differential game (1)-(4), where

$$\lambda(v, z_0) = \frac{1}{|z_0|^2 - l^2} \left[\langle v, z_0 \rangle + \varphi(t)l + \sqrt{(\langle v, z_0 \rangle + \varphi(t)l)^2 + (|z_0|^2 - l^2)(\varphi^2(t) - |v|^2)} \right],$$

$$\varphi(t) = \rho a^{-kt} + a^{kt}, \quad m(z_0, t, v) = -\frac{v - \lambda(z_0, t, v)z_0}{|v - \lambda(z_0, t, v)z_0|} l.$$

Here $\langle v, z_0 \rangle$ is scalar product of the vectors v and z_0 in $\mathbb{R}^n$. Moreover, the function $\lambda(z_0, t, v)$ is usually called the *resolving function*.

Definition 2. It is said that the Π_l -strategy (7) *guarantees to occur l -approach* on time interval $[0, T(z_0, v(\cdot))]$ if, for any $v(\cdot) \in V_\sigma^{a,k}$:

a) there exists an instant $t_* \in [0, T(z_0, v(\cdot))]$ at which $|z(t_*)| \leq l$ is satisfied;

b) an inclusion $u(v, z_0) \in U_\rho^{a,k}$ is fulfilled on the interval $[0, t_*]$, where we say the number $T(z_0, v(\cdot))$ a *guaranteed time of l -approach*.

Theorem. If one of the following conditions holds in differential game (1) – (4), that is, 1. $0 < a < 1, \rho > \sigma$ or 2. $a > 1, \rho > \sigma + k(|z_0| - l) \ln a$, then Π_l -strategy (7) guarantees to occur l -approach on the time $T(z_0, v(\cdot)) \leq T_l$ in the l -approach problem (1)-(4), where

$$T_l = \frac{1}{k} \log_a \frac{\rho - \sigma}{\rho - \sigma - (|z_0| - l)k \ln a}.$$

References

- [1] L.A. Petrosyan, V.G. Dutkevich, *Games with "a Survival Zone", Occasion L-catch* (in Russian), Vestnic Leningrad State Univ., 1969, 3(13), 31-38.
- [2] A.A. Chikrii, *Conflict-Controlled Processes*, Dordrecht; Kluwer, 1997.

[3] A.S. Bannikov, N.N. Petrov, *Linear non-stationary differential pursuit games with several evaders*, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh.Komp.Nauki, 2014, 78(3), 3-12.

[4] B.T. Samatov, *Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players II*, Cybernetics and Systems Analysis, 2013, 49(6), 907-921.

[5] B.T. Samatov, M.A. Horilov, A.Kh. Akbarov, *Differential game: "Lifeline" for Non-Stationary Geometric Constraints On Controls*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, 43(1), 237-248.

FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATION WITH THE CAPUTO DERIVATIVE

Saparbayev R.A.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: rajapboy1202@gmail.com

The Telegraph equation

$$(D_t^\rho)^2 u(t) + 2\alpha D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t) \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < \rho < 1,$$

with the Caputo derivative is considered. In a Hilbert space H is investigated. Here A is a selfadjoint positive operator, $D_t^\rho u(t)$ is the Caputo derivative. Existence and uniqueness theorem for the solution to the problem under consideration is proved.

Let $\rho \in (0, 1)$ be a fixed number. Consider the following Cauchy problem

$$\begin{cases} (D_t^\rho)^2 u(t) + 2\alpha D_t^\rho u(t) + Au(t) = f(t), 0 < t \leq T; \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_t^\rho u(t) = \varphi_0, \\ u(0) = \varphi_1, \end{cases} \quad (1)$$

where $f(t) \in C(H)$ and φ_0, φ_1 are known elements of H .

Definition. If function $u(t)$ with the properties $(D_t^\rho)^2 u(t), Au(t) \in C([0, T]; H)$ and $u(t), D_t^\rho u(t) \in C(H)$ and satisfying conditions (1) is called of the forward problem.

In order to formulate the main results of this paper, we introduce the Hilbert space of "smooth" functions related to the degree of operator A . Let τ be an arbitrary real number. We introduce the power of operator A , acting in H according to the rule

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k.$$

Obviously, the domain of definition of this operator has the form

$$D(A^\tau) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty\}.$$

For elements of $D(A^\tau)$ we introduce the norm

$$\|h\|_\tau^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 = \|A^\tau h\|^2,$$

and together with this norm $D(A^\tau)$ turns into a Hilbert space.

Theorem. Let $\alpha > 0$, $\varphi_0, \varphi_1 \in D(A)$. Further, let $0 < \epsilon < 1$ be any fixed number $f(t) \in C([0, T]; D(A^\epsilon))$. Then the forward problem has a unique solution.

References

[1] R. Cascaval, E. Eckstein, C. Frota, A. Goldstein. *Fractional telegraph equations*. J. Math. Anal. Appl. 276, 2002, pp. 145-159.

[2] A.V. Pskhu, *Fractional Partial Differential Equations*. Moscow: Nauka, 2005.

EXACT SOLUTIONS FOR THE DOUBLE SINH-GORDON EQUATION WITH LOADED BY USING (G'/G) -EXPANSION METHOD

Saparbayeva D.R.

Urgench state university, Urgench, Uzbekistan

e-mail: sdilfuza76@mail.ru

We first solve the double sinh-Gordon equation with loaded

$$u_{tt} - ku_{xx} + 2\alpha \sinh u + \beta \sinh(2u) + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0, \quad (1)$$

where $u(x,t)$ is an unknown function, $x \in R$, $t \geq 0$, $\gamma(t)$ - is the given real continuous function.

We suppose that the given nonlinear partial differential equation for $u(x,t)$ has the form

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2)$$

where P is a polynomial in its arguments. The essence of the (G'/G) -expansion method is the following steps:

Step 1. Seek traveling wave solutions of equation (2) by taking $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi(x,t) = x + ct$, and transform equation (2) to the ordinary differential equation

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0, \quad (3)$$

where prime denotes the derivative with respect to ξ .

Step 2. If possible, integrate equation (3) term by term one or more times. This yields constant(s) of integration. For simplicity, the integration constant(s) can be set to zero.

Step 3. Introduce the solution $U(\xi)$ of equation (3) in the finite series form

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i, \quad (4)$$

where a_i are real constants with $a_N \neq 0$ to be determined, N is a positive integer to be determined. The function $G(\xi)$ is the solution of the auxiliary linear ordinary differential equation

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \quad (5)$$

where λ and μ are real constants to be determined.

Step 4. Determine N . This, usually, can be accomplished by balancing the linear term(s) of highest order with the highest order nonlinear term(s) in equation (3).

Step 5. Substituting (4) together with (5) into equation (3) yields an algebraic equation involving powers of (G'/G) . Equating the coefficients of each power of (G'/G) to zero gives a system of algebraic equations for a_i , λ , μ and c . Then, we solve the system with the aid of a computer algebra system, such as Maple, to determine these constants. On the other hand, depending on the sign of the discriminant $\Delta = \lambda^2 - 4\mu$, the solutions of equation (5) are well known to us. So, as a final step, we can obtain exact solutions of equation (2).

Conclusions. In this paper, the (G'/G) -expansion method is used to conduct an analytic study on the double sinh-Gordon with loaded equation. The exact traveling wave solutions being determined in this study are more general, and it is not difficult to arrive at some known analytic solutions for certain choices of the parameters. Comparing the proposed method with the methods used in [1–8], show that the (G'/G) -expansion method is not only simple and straightforward, but also avoids tedious calculations

References

- [1]. H. K and A. J. Exact solutions for the double sinh-Gordon and generalized form of the double sinh-Gordon equations by using (G'/G) -expansion method.
- [2] Z. L. Li, Constructing of new exact solutions to the GKdV-mKdV equation with any-order nonlinear terms by (G'/G) -expansion method, Appl. Math. Comput., 217,
- [3] E. M. Zayed, The (G'/G) -expansion method and its applications to some nonlinear evolution equations in the mathematical physics, J. Appl. Math. Comput., 30, 89(2009)
- [4] E. M. Zayed, The (G'/G) -expansion method combined with the Riccati equation for finding exact solutions of nonlinear PDEs, J. Appl. Math. Inform., 29, 351 (2011). 9
- [5] E. M. Zayed, K. A. Alurr, Extended generalized (G'/G) -expansion method for solving the nonlinear quantum Zakharov Kuznetsov equation, Ricerche Mat., 65, 235 (2016).

[6] N. Shang, B. Zheng, Exact Solutions for Three Fractional Partial Differential Equations by the (G'/G) Method, Int. J. Appl. Math., 43, 114 (2013).

[7] A. Bekir, O. Guner, Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by (G'/G) expansion method, Chin. Phys. B, 22, 110202 (2013).

[8] A. Bekir, Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations, Phys. Lett. A, 372, 3400.

TIME-DEPENDENT SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM FOR THE SUBDIFFUSION EQUATION WITH CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

Shakarova M.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: shakarova2104@gmail.com

Let $\rho \in (0,1)$. Consider the following initial-boundary value problem

$$\begin{cases} D_t^\rho u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x)g(t), & x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Here $f(x)$, $g(t)$, and $\varphi(x)$ are continuous functions in the closed domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. and $D_t^\rho h(t)$ stands for the Caputo fractional derivative.

The purpose of this paper is not only to find the solution $u(x,t)$, but also to determine the time-dependent part $g(t)$ of the source function. To solve this time-dependent source identification problem one needs an extra condition. Following the papers of R. Ashurov et al. [1], we consider the additional condition in the form:

$$u(x_0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

where $x_0 \in \bar{\Omega}$.

We call the initial-boundary value problem (1) together with additional condition (2) *the inverse problem*.

In order to prove the existence of solutions of forward and inverse problems, it is necessary to study the convergence of the following series:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau |h_k|^2, \quad \tau > \frac{N}{2}, \quad (3)$$

where h_k are the Fourier coefficients of function $h(x)$. In the case of integers τ , in the fundamental paper [2] by V.A. Il'in, conditions are obtained for the convergence of such series in terms of the membership of function $h(x)$ in the classical Sobolev spaces $W_2^k(\Omega)$. To formulate these conditions, we introduce the class $\dot{W}_2^1(\Omega)$ as the closure in the $W_2^1(\Omega)$ norm of the set of all functions that are continuously differentiable in Ω and vanish near the boundary of Ω .

The theorem of V. A. Il'in states that, if function $h(x)$ satisfies the conditions

$$h(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+1}(\Omega) \quad \text{and} \quad h(x), \Delta h(x), \dots, \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]} h(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad (4)$$

then the number series (3) converges. Here $[a]$ denotes the integer part of the number a .

Similarly, if in (3) we replace τ by $\tau + 2$, then the convergence conditions will have the form:

$$h(x) \in W_2^{\left[\frac{N}{2}\right]+3}(\Omega) \quad \text{and} \quad h(x), \Delta h(x), \dots, \Delta^{\left[\frac{N}{4}\right]+1} h(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega). \quad (5)$$

Theorem 1. Let $f(x_0) \neq 0$ and $D_t^\rho \psi(t) \in C[0, T]$. Moreover let function $\varphi(x)$ satisfy condition (4) and $f(x)$ satisfy condition (5). Then the inverse problem has a unique solution $\{u(x, t), g(t)\}$.

Theorem 2. Let $\varphi(x)$ satisfy condition (5) and let assumptions of Theorem 1 be satisfied. Then the solution to the inverse problem obeys the stability estimate

$$\|D_t^\rho u\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, T])} + \|\Delta u\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, T])} + \|g\|_{C[0, T]} \leq C_{\rho, f, x_0} [\|\varphi\|_{\sigma+1} + \|\psi\|_{C[0, T]}],$$

where C_{ρ, f, x_0} is a constant depends on ρ, f and x_0 .

References

- [1] Ashurov R.R, Shakarova M.D., Time-dependent source identification problem for fractional Schrodinger type equations, Lobachevskii Journal of Mathematics, 42, 3, (2022), pp.517-525.
- [2] Il'in V.A., On the solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, Russian Math. Surveys, 15, 2, (1960), pp.97-154. [in Russian].

TO'RTINCHI TARTIBLI NOKORREKT BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALANI SHARTLI KORREKTLIKKA TEKSHIRISH

Shobdarov E.B.

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, Toshkent, O'zbekiston

e-mail: e.b.shobdarov@gmail.com

Ushbu tadqiqot ishida parabolik tipdagi operatorlar tuzilmasidan tashkil topgan tenglama uchun nokorrekt boshlang'ich-chegaraviy masala shartli korrektilikka tekshirilgan.

Berilgan $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ sohada

$$L_1 L_2 u(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

tenglama va

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2)$$

boshlang'ich,

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyani toping, bu yerda $L_t u \equiv u_t - (-1)^i a^2 u_{xx} + c_i u$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ($(x,t) \in \Omega$) sohada yetarlicha silliq berilgan funksiyalar, a, c_i - o'zgarmas sonlar, $i = 1, 2$.

Parabolik tipdagi tenglama uchun teskari Koshi masalasi ko'plab matematiklar tomonidan o'rganilgan. Bularga A.N. Tixonov, E.M. Landis, S.G. Kreyn, J.R. Canon va boshqa mualliflarning ishlarini keltirish mumkin. Bu turdagi masalalar matematik fizikaning Adamar ma'nosida nokorrekt masalalar sinifiga kiradi, va bularda yechimning boshlang'ich berilganlarga uzluksiz bog'liqlik bajarilmaydi.

Ushbu ishda qarayotgan (1) - (3) masalaning yechimi uchun aprior baho olinadi va masalaning shartli korrektilik to'plami aniqlanadi. Korrektilik to'plamda masala yechimining yagonaligi va shartli turg'unligi haqidagi teoremlar isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

[1] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. - 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. - 912 с.

[2] Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. - 184 с.

INVERSE PROBLEM FOR HEAT EQUATION WITH AN INTEGRAL OVER DETERMINATION CONDITION

^{1,2}**Sobirov Z. A.**, ^{1,3}**Turemuratova A. A.**

¹National university of Uzbekistan,

²V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,

³Branch of Russian Economic University named after G. V. Plekhanov in Tashkent, Uzbekistan

e-mail: ¹z.sobirov@nuu.uz, ²ariuxanturemuratova@gmail.com

We investigate the heat conduction equation on the simple star graph. A star metric graph Γ with n bond consists of a finite set of vertices $V = \{\nu_k\}_{k=0}^n$ and a finite set of edges $E = \{E_k\}_{k=1}^n$, where E_k connect the vertices ν_0 and ν_k , $k = \overline{1, n}$ (see [2]). By assigning the interval $(0, l_k)$, to the bond E_k , $k = \overline{1, n}$, of the graph we define the coordinates on each of the bonds. Where the vertex of the graph has coordinate 0 in each bond.

On each bounds we consider the heat conduction equation

$$u_t^{(k)}(x,t) - u_{xx}^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(t)g^{(k)}(x,t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

in a bounded domain $G = \Gamma \times (0, T]$ satisfying the initial

$$u^{(k)}(x, 0) = \varphi^{(k)}(x), \quad x \in \Gamma, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

the vertex conditions

$$\sum_{k=1}^n \delta_k^2 \frac{\partial u^{(k)}(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u^{(k)}(0, t) = u^{(j)}(0, t), \quad t \in (0, T], \quad i \neq j, \quad k, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

and the boundary conditions

$$u^{(k)}(l_k, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

where $\delta_k = \text{const}$, g_k , φ_k are given functions.

We consider the inverse problem of determining of a pair of functions $\{u, f\}$ with the following over determination condition

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} v^{(k)}(x) u^{(k)}(x, t) dx = \psi(t), \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

where ψ is known function. We prove the existence of the unique solution with use of the contraction mapping theorem.

References

- [1] Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, (Russian), Moscow: Nauka, 1973.
- [2] Berkolaiko G., Kuchment P. *Introduction to quantum graphs*. Mathematical surveys and monographs, vol. 186, AMS, 2013.
- [3] Taki-Eddine Oussaeif, Abdelfatah Bouziani. *Inverse problem of a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition*. Electronic journal of Differential Equations, vol. 2016, No 138, pp. 1-7.

AN ABSTRACT CHARACTERIZATION OF l_2

Toshmatova M. M., Azizov A.N.

National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: toshmatovamaftunahon5@gmail.com, azizov.07@mail.ru

Let l_∞ (respectively, c_0) be the Banach space of bounded (respectively, converging to zero) sequences $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of complex numbers equipped with the uniform norm $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers.

If $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$, then the non-increasing rearrangement $\xi^* : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ of ξ is defined by

$$\xi^*(t) = \inf \{ \lambda : \mu \{ |\xi| > \lambda \} \leq t \}, \quad t > 0,$$

(see, for example, [1]). As such, the non-increasing rearrangement of a sequence $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ can be identified with the sequence $\xi^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, where

$$\xi_n^* = \inf \left\{ \sup_{n \notin F} |\xi_n| : F \subset \mathbb{N}, |F| < n \right\}.$$

If $\{\xi_n\} \in c_0$, then $\xi_n^* \downarrow 0$; in this case there exists a bijection $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ such that $|\xi_{\pi(n)}| = \xi_n^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Hardy-Littlewood-Polya partial order in the space l_∞ is defined as follows:

$$\xi = \{\xi_n\} \prec \eta = \{\eta_n\} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^m \xi_n^* \leq \sum_{n=1}^m \eta_n^* \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}.$$

A non-zero linear subspace $E \subset l_\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called a *symmetric (fully symmetric) sequence space* if

$$\eta \in E, \xi \in l_\infty, \xi^* \leq \eta^* \text{ (resp., } \xi^* \prec \eta^*) \Rightarrow \xi \in E \text{ and } \|\xi\|_E \leq \|\eta\|_E.$$

Every fully symmetric sequence space is a symmetric sequence space. The converse is not true in general. At the same time, any separable symmetric sequence space is a fully symmetric space.

If $(E, \|\cdot\|_E)$ is a symmetric sequence space, then

$$\|\xi\|_E = \|\xi^*\|_E \quad \text{for all } \xi \in E.$$

The following spaces are the most known species of *fully symmetric* sequence spaces:

$$l_p = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}, \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p},$$

where $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_p$, $p \geq 1$.

In the linear space l_p we can define coordinate-wise multiplication of elements $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l_p$ by the following formula

$$x \cdot y = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^\infty.$$

It is clear that for every $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ and $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l_p$ the implication $x \cdot y \in l_p$ is true.

Now let consider l_2 space (when $p = 2$). It is known that, l_2 is Hilbert space, and we can easily check that for every $x, y \in l_2$, $x \cdot y = 0$, the equality

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

is hold. In addition, the converse proposition is also true, i.e. we can prove the following *abstract characterization* of l_2 space.

Theorem. If $(E, \|\cdot\|)$ is a fully symmetric sequence space with

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

for all $x, y \in E$, such that $x \cdot y = \{0, 0, \dots\}$, then $E = l_2$.

References

[1] Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*. Academic Press Inc. - 1988.

INVERSE-SOURCE PROBLEM FOR PSEUDO-PARABOLIC TYPE EQUATION

Toshtemirov B.

Kokand University, Kokand, Uzbekistan

It-Park University, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: toshtemirovbh@gmail.com

One of the classical models in quantum physics is the Landau Hamiltonian, which describes the behavior of a quantum particle in two dimensions under the influence of a constant magnetic field and it was introduced in late 1920-s (see [1]). On the Euclidean xy -plane interacting with a perpendicular homogeneous electromagnetic field, the following Hamiltonian operator determines the dynamics of a particle with mass m and charge e :

$$\mathcal{H}_0 := \frac{1}{2m} \left(i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbb{A} \right)^2, \quad (1)$$

where i denotes the imaginary unit, $\hbar$ is Planck's constant, c is the speed of light. We denote by $2B > 0$ the strength of the magnetic field and the symmetric gauge can be selected by

$$\mathbb{A} := \frac{r}{2} \times \mathbb{B} = (-By, Bx),$$

where $r = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

In $\Omega = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^2\}$, we are concerned with studying the inverse source problem of finding a pair of functions $\{u(t, x), f(x)\}$ satisfy to the following problem

$$\begin{cases} D_t^{(\alpha, \beta)\mu} u(t, x) + (aD_t^{(\alpha, \beta)\mu} + q)\mathcal{H}u(t, x) = f(t, x), & (t, x) \in \Omega, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} I_{0+}^{\mu(1-\mu)(1-\beta)} u(t, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2)$$

where $a, q \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ and $D_t^{(\alpha, \beta)\mu}$ is the left-sided bi-ordinal Hilfer's fractional derivative of orders α and β of type μ as stated

$$D_t^{(\alpha, \beta)\mu} f(t) = I_{a+}^{\mu(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) I_{a+}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t),$$

$\mathcal{H}$ is a Landau Hamiltonian operator acting on the $L^2(\mathbb{R}^2)$ defined by

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x} - By \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial y} - Bx \right)^2 \right), \quad (3)$$

which can be obtained from (1) by setting $m = h = c = e = 1$.

In order to solve the problem uniquely, we use the following over-determination condition

$$u(T, x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}^2,$$

where $u_0(x)$, $\psi(x)$ are given functions.

The spectrum of $\mathcal{H}$ contains the infinite number of eigenvalues with the infinite multiplicity of the form (see [2], [3]) $\lambda_n = (2n+1)B, n = 0, 1, 2, \dots$, and those eigenvalues are called the Euclidean Landau levels. Let us denote the eigenspace of $\mathcal{H}$ corresponding to the eigenvalue λ_n by $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$, i.e.

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^2), \mathcal{H}\phi = \lambda_n\phi\}.$$

The eigenfunctions corresponding λ_n can be designated by

$$e_{\xi}^k := e_{j,n}^k \text{ for } \xi = (j, n), j, n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2.$$

In the references [4], [5] the following functions are presented as the orthonormal basis for $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} e_{k,n}^1(x, y) = c_{k,n} \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} B^{\frac{k+1}{2}} \exp\left(-\frac{B(x^2 + y^2)}{2}\right) (x + iy)^k L_n^{(k)}(B(x^2 + y^2)), 0 \leq k, \\ e_{j,n}^2(x, t) = c_{j,n} \sqrt{\frac{j!}{(n+n)!}} B^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{B(x^2 + y^2)}{2}\right) (x - iy)^n L_j^{(n)}(B(x^2 + y^2)), 0 \leq j, \end{cases} \quad (4)$$

where c_{kn} , c_{jn} are the normalizing coefficients, $L_n^{(\alpha)}$ is the Laguerre polynomial defined as

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{x^k}{k!}, \alpha > -1.$$

The global Fourier analysis for the Landau Hamiltonian $\mathcal{H}$ that has been developed in [6], [7] and the Sobolev spaces $H_{\mathcal{H}}^s$ associated to the operator $\mathcal{H}$ has been defined for any $s \in \mathbb{R}$ as the space

$$H_{\mathcal{H}}^s := \{f \in \mathcal{D}'_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2) : \mathcal{H}^{s/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)\},$$

with the norm $\|f\|_{H_{\mathcal{H}}^s} := \|\mathcal{H}^{s/2} f\|_{L^2}$ and $\mathcal{D}'_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$ is the global space of distributions.

We seek a generalized solution by $\mathcal{H}$ -Fourier method and prove the existence and uniqueness result to the problem (2).

Theorem. Assume that $u_0 \in H_{\mathcal{H}}^1$, $\psi \in H_{\mathcal{H}}^1$. Then the problem (2) has a unique pair of solutions $\{u(t, x), f(x)\}$.

References

[1] Landau, L., Lifshitz, E.: *Quantum Mechanics (Non-relativistic theory)*. 3rd edition, Pergamon Press, Oxford, 1977.

[2] V. Fock, Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld. *Zeitschrift für Physik A*, 1928, V. 47, Iss. (5-6), pp. 446–448.

[3] Landau L. Diamagnetismus der Metalle. *Zeitschrift für Physik A*. 1930, V. 64, Iss. (9-10), pp. 629–637.

[4] Haimi A., Hedenmalm H. The Polyanalytic Ginibre Ensembles. *J Stat Phys*. 2013, V. 153, pp. 10–47.

[5] Abreu L.D., Balazs P., De Gosson M., Mouayn Z. Discrete coherent states for higher Landau levels. *Annals of Physics*, 2015, V. 363, pp. 337–353.

[6] Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Nonharmonic analysis of boundary value problems. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2016, V. 12, pp. 3548–3615

[7] Ruzhansky M.V., Tokmagambetov N.E. On a Very Weak Solution of the Wave Equation for a Hamiltonian in a Singular Electromagnetic Field. *Math Notes*. 2018, V. 103, pp. 856–858.

PURSUIT–EVASION DIFFERENTIAL GAMES WITH La CONSTRAINTS

Uralova S. I.

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: saboxat.17@inbox.ru

We consider pursuit-evasion differential games with objects **P** (Pursuer) and **E** (Evader) in the space $\mathbf{R}^n$. The equations of motions of players **P** and **E** are given by:

$$\mathbf{P}: \dot{x} = k(t)u \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}: \dot{y} = k(t)v \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \neq y_0$, u and v are the velocity vectors of players **P** and **E** satisfying the Langenhop inequalities (briefly, La -constraint):

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 - 2 \int_0^t k(s) |u(s)|^2 ds \quad \text{for almost every, } 0 \leq t < \bar{t} \quad (3)$$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2 \int_0^t k(s) |v(s)|^2 ds \quad \text{for almost every, } 0 \leq t < \bar{t} \quad (4)$$

where ρ, σ are given positive numbers; $u(\cdot) \in U_{La}$ and $v(\cdot) \in V_{La}$. U_{La} (correspondingly V_{La}) is the class of all admissible controls $u(\cdot)$ satisfying (3) (correspondingly $v(\cdot)$ satisfying (4)). We also see the following constraints for the players **P** and **E**: Geometric inequality (briefly, G -constraint)

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 \exp \left(-2 \int_0^t k(s) ds \right) \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (5)$$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 \exp \left(-2 \int_0^t k(s) ds \right) \quad \text{for almost every } t \geq 0, \quad (6)$$

where ρ, σ are given positive numbers; $u(\cdot) \in U_G$ and $v(\cdot) \in V_G$. U_G (correspondingly V_G) is the class of all admissible controls $u(\cdot)$ satisfying (5) (correspondingly $v(\cdot)$ satisfying (6)).

Integral inequality (briefly, I -constraint):

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho^2}{2} \left(1 - \exp \left(-2 \int_0^t k(s) ds \right) \right), \quad t \geq 0 \quad (7)$$

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \exp \left(-2 \int_0^t k(s) ds \right) \right), \quad t \geq 0 \quad (8)$$

where ρ, σ are given positive numbers; $u(\cdot) \in U_I$ and $v(\cdot) \in V_I$. U_I (correspondingly V_I) is the class of all admissible controls $u(\cdot)$ satisfying (7) (correspondingly $v(\cdot)$ satisfying (8)).

It is also required that the scalar measurable function $k(t)$ in (1)-(8) is such that for all $t \geq 0$, exists positive numbers α and β satisfying the inequality:

$$\alpha \leq k(t) \leq \beta$$

Lemma 1. $U_G \subset U_{La} \subset U_I$ (correspondingly $V_G \subset V_{La} \subset V_I$)

Definition 1. If $\rho \geq \sigma$, then a Π_{La} -strategy of the pursuer $\mathbf{P}$ in the game (1)-(4), is the function of the form

$$\mathbf{u}_{La}(t, v) = v - \lambda_{La}(t, v) \xi_0, \quad (9)$$

$$\lambda_{La}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \delta \exp \left(-2 \int_0^t k(s) ds \right)},$$

where $\delta = \rho^2 - \sigma^2$, $\xi_0 = z_0 / |z_0|$ and by $\langle v, \xi_0 \rangle$ denotes the inner product of vectors v and ξ_0 the scalar product in $\mathbf{R}^n$

Definition 2. If there exists at least one positive root of the equation

$$\sqrt{\Upsilon_p(t) + \Omega_p(t)} - \sqrt{\Upsilon_p(t)} = |z_0| \quad (10)$$

with respect to t , where $\Upsilon_p(t) = \frac{\beta \rho^2 t}{2} (1 - e^{-2\beta t})$, $\Omega_p(t) = \delta (1 - e^{-\alpha t})^2$ then the smallest positive root of the equation (11) we term a guaranteed pursuit time and denote it by t^* .

Theorem 1. If $\rho \geq \sigma$ and the equation (10) has smallest positive root, then pursuit problem is possible in the game (1)-(4).

Definition 3. If $\sigma \geq \rho$ in the game (1)-(4), then we call the function (12) is strategy of the evader

$$v^*(t, u_\varepsilon(t)) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ -\sqrt{|u(t - \varepsilon)|^2 + \theta \exp \left(-2 \int_\varepsilon^t k(s) ds \right)} \xi_0, & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (11)$$

where $u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ u(t - \varepsilon), & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases} \quad u_\varepsilon(t) \in R^n, \quad \theta = \sigma_0^2 - \rho_0^2, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}.$

Theorem 2. If $\rho \leq \sigma$, from lemma and conditions $0 < \varepsilon \leq \frac{2|z_0|^2}{\beta\rho^2}$ in the game (1)-(4), then the evasion is possible and the following estimate for the between the objects holds for all $t \geq 0$

$$z(t) > \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \leq t < \varepsilon, \\ \left[\sqrt{\Upsilon_\varepsilon(t - \varepsilon) + \Omega_\varepsilon(t - \varepsilon)} - \sqrt{\Upsilon_\varepsilon(t - \varepsilon)} \right], & \text{if } t \geq \varepsilon, \end{cases}$$

where $\Upsilon_E(t) = \frac{\beta\sigma^2 t}{2} (1 - e^{-2\beta t})$, $\Omega_P(t) = (\sigma^2 - \rho^2)(1 - e^{-\alpha t})^2$

Conclusion. We have studied the pursuit-evasion differential game in the plane R^n . Motions of players are described by first order differential equations. Control functions of the players are subjected to **La** constraints. We formulated and proved theorems that provide sufficient conditions for pursuit- evasion to be possible in the problems considered.

References

- [1] Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacaemath. Publ.Sofia, 1986, 12(1), 38–43.
- [2] Samatov B.T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of the Pursuer Resource. Siberian Advances in Mathematics, Allerton Press, Inc.Springer. New York, 2013, 23(4): 294–302.
- [3] Samatov B.T. The Pursuit-Evasion Problem under Integral-Geometric constraints on Pursuer controls. Automation and Remote Control, Pleiades Publishing, Ltd. New York. 2013, 74(7): 1072–1081.
- [4] Samatov B.T. The Π -strategy in a differential game with linear control constraints. J. Appl. Maths and Mechs, Elsevier. Netherlands. 2014, 78(3): 258–263.

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИРАКА ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

Абдуназаров Р., Абдурашидова Л.У.

*Джизакского филиала Национального университета Узбекистан
e-mail: rabimkulabdunazarov@gmail.com, au_lobar@gmail.com,*

Рассмотрим в $L_2[0, \pi]$ самосопряженный оператор Дирака

$$D[Y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} + \begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix} Y, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$$

Пусть задача на собственные значения оператора

$$D[Y] = \lambda Y \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y_1(0) \cos \alpha_0 + y_2(0) \sin \alpha_0 = 0 \quad (2)$$

$$y_1(0) \cos \beta_0 + y_2(0) \sin \beta_0 = 0 \quad (3)$$

$$y_1(\pi) = 0$$

порождает дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Здесь α_0, β_0 , действительные числа и $\alpha_0 \neq \beta_0$, $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции.

Известно [1], что по спектрам $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ однозначно определяются ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ и, следовательно, по ним восстанавливаются функции $p(x)$, $q(x)$.

В настоящей работе произведена численная реализация решения обратной задачи по двум наборам спектров при различных граничных условиях в одном конце интервала. Предлагаются эффективные методы вычисления величин a_n с точностью до $\varepsilon = 0(1/N^5)$ по данным наборам спектров $\{\lambda_n\}_{n=-N}^N$ и $\{\mu_n\}_{n=-N}^N$. Полное решение данной задачи состоит из последовательно решаемых следующих четырех подзадач: а) Определение коэффициентов асимптотики спектре, б) Вычисление ядра спектральной меры $[a_n]^{-1}$ при $n < N$ и $n > N$, г) Восстановление функции $p(x)$, $q(x)$ по дискретизированному интеграла Гельфанда- Левитана [2].

Задача I. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ при больших n имеют следующую асимптотику[1]:

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \frac{\alpha_4}{n^4}, \quad \mu_n = n - \frac{\beta_0}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \frac{\beta_3}{n^3} + \frac{\beta_4}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Если нам задано $2N - 1$ число $\{\lambda_n\}_{n=-N}^N$ и $\{\mu_n\}_{n=-N}^N$ с точностью до $O(1/N^5)$, то пользуясь методами разностного исчисления и предложенной по схеме [2], [7], можно определить значения $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Задача II. Получим рабочую формулу для вычисления a_n при $n < N$. Согласно [I], восстановление ядра по двум спектрам производится формулой

$$a_n = \frac{\sin(\alpha_0 - \beta_0)}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \quad (4)$$

Можно заметить, что формула (4) содержит в себе очень медленно сходящееся бесконечное произведение и непосредственное использование этой формулы привело бы к большой потере точности. Для этого преобразуя бесконечное произведение с конечными алгебраическими выражениями и после некоторой алгебраической операции над формулой (4) получим

$$a_n = \sin(\alpha_0 - \beta_0) \Psi_3(\lambda_n) \frac{\Psi_1(\lambda_n)}{\Psi_2(\lambda_n)} \quad (5)$$

где

$$\Psi_1(\lambda_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[1 - \frac{f_1(\lambda_k) - \lambda_n f_2(\lambda_k)}{k^2 - \bar{\lambda}_n^2} \right] / \prod_{k=1}^N \left[1 + \frac{R'_1 + 2\alpha_2 \lambda_n}{k^2 (k^2 - \bar{\lambda}_n^2)} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left\{ (R'_1 + 2\alpha_2 \lambda_n) \left[\frac{1}{2\bar{\lambda}_n^4} - \frac{\pi^2}{6\bar{\lambda}_n^2} - \frac{\pi}{2\bar{\lambda}_n^3} \operatorname{ctg}(\bar{\lambda}\pi) \right] \right\} \\ \Psi_2(\lambda_n) &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[1 - \frac{f_1(\mu_k) - \lambda_n f_2(\mu_k)}{k^2 - \tilde{\lambda}_n^2} \right] / \prod_{k=1}^N \left[1 + \frac{R_1 + 2\beta_2 \lambda_n}{k^2 (k^2 - \tilde{\lambda}_n^2)} \right] \times \\ & \times \exp \left\{ (R_1 + 2\beta_2 \lambda_n) \left[\frac{1}{2\tilde{\lambda}_n^4} - \frac{\pi^2}{6\tilde{\lambda}_n^2} - \frac{\pi}{2\tilde{\lambda}_n^3} \operatorname{ctg}(\tilde{\lambda}_n \pi) \right] \right\} \\ \Psi_3(\lambda_n) &= \frac{(\lambda_n - \lambda_{-n})(n^2 - \tilde{\lambda}_n^2)(\lambda_0 - \lambda_n)\tilde{\lambda}_n \sin(\pi \bar{\lambda}_n)}{[n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 - f_1(\mu_n) + \lambda_n f_2(\mu_n)](n^2 - \bar{\lambda}_n^2)(\lambda_n - \mu_0)\bar{\lambda}_n \sin(\pi \tilde{\lambda}_n)} \\ f_1(\lambda_k) &= k^2 + \lambda_k \lambda_{-k} - \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 + 2\alpha_1, \quad f_2(\lambda_k) = \lambda_k + \lambda_{-k} + \frac{2\alpha_0}{\pi}, \end{aligned}$$

Задача III. Асимптотика спектральной меры $[a_n]^{-1}$ задачи (1)-(3) при больших n имеет следующую асимптотику [1],[7]

$$[a_n]^{-1} = n - \frac{c_0}{\pi} + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{c_4}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

Отклоняясь от классического метода (например [7]), для определения коэффициентов асимптотики приступим по следующему: -определим по (5) первые $2N - 1$ значения чисель $[a_n]^{-1}$; -аналогично, как в Задачи I, по $2N - 1$ известным значениям $[a_n]^{-1}$ определим значения c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 .

Задача IV. По имеющийся данными λ_n, μ_k и $[a_n]^{-1}$, определяется значения функций $p(x)$ и $q(x)$ в интервале $[0, \pi]$.

Литература

[1] Б.М.Левитан. И.С.Сарксян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. Москва (МГУ). 1984 г.

[2] Rabimkul A. NOKORREKT SHARTLARDA SHTURM-LIUVILL OPERATORI PARAMETRLARINI TIKLASH MASALALARI //International Journal of Contemporary Scientific and Technical Research. – 2022. – С. 24-28.

[3] Abdunazarov R. Issues of effective organization of practical classes and clubs in mathematics in technical universities. Mental Enlightenment Scientific-Methodological Journal. Current Issue: Volume 2022, Issue 3 (2022) Articles.

[4] Rabimkul A., Haydarovich H. O. Calculating The Volume Of Liquid In Cylinder Vessels Which Have Curved Borders Level 2 Geometric Surface //The American Journal of Applied sciences. – 2021. – Т. 3. – №. 12. – С. 16-21.

[5] Рабимкул А. и др. Аргументларни гуруҳларга ажратиб баҳолаш усулида кўп параметрли нозикли регрессия тенгламаларини куриш масалалари //Educational Research in Universal Sciences. – 2023. – Т. 2. – №. 2. – С. 174-178.

[6] Абдуназаров Р. Штурм-лиувилл оператори учун тескари масалани сонли усулда ечиш муаммолари //Современные инновационные исследования актуальные проблемы и развитие тенденции: решения и перспективы. – 2022. – Т. 1. – №. 1. – С. 369-372.

[7] Абдуназаров Р. О численной реализации решения обратной спектральной задачи для оператора Дирака. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Выпуск 95. Ташкент. 1993. Стр. 10-20.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

¹Азамов А. А., ²Бекимов М. А., ¹Дустназаров С. Б.

¹Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент,
Узбекистан

²Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается задача математического моделирования процесса теплообмена между трубой определенной длины и газом, протекающим по этой трубе.

Предполагается, что форма трубы и поток теплоагента удовлетворяют следующему условию: температура и скорость теплоагента меняется не очень сильно как вдоль трубы, так и с течением времени. Такому условию удовлетворяет, например, теплообмен на системах подогрева в теплицах, водяного охлаждения в тепловыделяющих агрегатах.

В настоящей работе для изучаемого процесса применяется метод, предложенный старшим из авторов и названный им «кинематографическим», согласно которому дискретизации подвергаются не дифференциальные уравнения, а сам исходный процесс. В результате получается линейная дискретная динамическая система вида

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= \bar{\alpha}_1 x_1(n) + \alpha_1 T_\Gamma, \\x_k(n+1) &= \bar{\alpha}_k x_k(n) + \alpha_k y_{k-1}(n), \\y_1(n+1) &= \beta_1 x_1(n) + \bar{\beta}_1 T_\Gamma, \\y_k(n+1) &= \beta_k x_k(n) + \bar{\beta}_k y_{k-1}(n), \quad k = 2, 3, \dots, m\end{aligned}$$

которая векторной записи примет вид

$$\begin{aligned}x(n+1) &= \bar{A}x(n) + Ay(n) + \alpha p, \\y(n+1) &= Bx(n) + \bar{B}y(n) + \bar{\beta} p,\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k], \quad \bar{A} = \text{diag}[\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_k], \quad B = \text{diag}[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k], \\ \bar{B} = \text{diag}[\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_k] - \text{диагональная матрица,}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p = (T_\Gamma, 0, \dots, 0)^*.$$

Такая модель имеет довольно грубое приближение к реальному процессу, так как игнорируются многие его особенности. Тем не менее, она дает удовлетворительный результат с точки зрения практических приложений, когда от модели не требуется высокая степень точности. Ранее метод был с успехом применен к расчету температуры теплопередающих наполнителей вращающихся регенеративных воздухонагревателей тепловых электростанций [1, 2].

Список литературы

[1] Азамов А.А., Бекимов М.А. Дискретная модель процесса теплообмена во вращающихся регенеративных воздухоподогревателях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017, Том 23, № 1, С. 12-19.

[2] Azamov A.A. Bekimov M.A. Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater// Ural Mathematical Journal 2 (2), (2016), 27-36

ФРАКТАЛ ҲИСОБ-КИТОБЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

¹Анарова Ш. А., ²Рустамов А. А.

¹Тошкент ахборот технологиялари университети, Ўзбекистон

²Самарқанд давлат университети, Ўзбекистон

e-mail: shakhzodaanarova@gmail.com, rustamovabror88@gmail.com

Ушбу мақоланинг мақсади фрактал ҳисоб-китоблар ва уларнинг тадбиқларига қаратилган. Бугунги кунда фракталлар назариясининг математик формулаларнинг тадбиқи, шунингдек, табиий объектлар ва табиий ҳодисаларни фракталлар назарияси ёяларидан фойдаланиб тавсифлаш усуллари – фанда мустақил янги соҳани очилишига сабаб бўлди. Каср тартибли дифференциаллашни математик таҳлил қилиш уч асрлик тарихга эга бўлиб, бу Лейбниц ва Лопитал ўртасидаги ёзишмаларда биринчи марта қўлланилган. Яъни, бутун сонли бўлмаган ҳосилалар ҳақида ёзганлар.

Олимларнинг 1695 йилдаги охириги мактубида каср $f^{\frac{1}{2}}(x)$ тартибли ҳосиланинг имкониятларини муҳокама қилиб, қуйидаги сўзларни ёзган: “... Ушбу ғоядан вақт ўтиб фойдали натижалар охир-оқибат келиб чиқади” дейилган.

Ҳозирги вақтда каср тартибли ҳисоблаш назарий ҳамда амалий жиҳатдан қўлланилиши жадал ривожланиш босқичида. Математик таҳлилнинг анъанавий ҳамда фрактал бўлими ҳар хил муҳитдаги мураккаб динамик жараёнларни математик моделлаштириш, синтез, таҳлил, диагностика (беморларни ташхислаш) ва янги бошқарув тизимларини яратишнинг турли муаммоларини ҳал қилишга имкон беради.

Каср тартибли ҳосиланинг математик таҳлилда кенг тарқалган ҳамда классик математик таҳлилда қўлланиладиган функциялар хусусан, факториаллар ва экспонент функцияларнинг умумлаштирилиши мавжуд

бўлиб, тадқиқот ишида бу функцияларни таҳлил қилиш уларни таққослаш билан кўрсатилган.

Каср тартибли ҳосилада Коши формуласи

$$\int dx \int dx \dots \int f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int (x-t)^{n-1} f(t) dt + P_{n-1}(x) \quad (1)$$

$P_{n-1}(x) - n-1$ тартибли кўпхад.

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx}_a = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt - \text{ихтиёрий } n \text{ тартибли (каррала) интеграл. Эйлер}$$

гамма функциясини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (3)$$

бу ерда t – ихтиёрий. Гамма функциясининг аргументи сифатида исталган сонлардан фойдаланиш мумкин. мусбат бутун $t = n$ учун гамма функцияси факториал билан қуйидагича боғлиқ [1]:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (4)$$

$n+1$ тартибли интегралдан ҳосила n тартибли интегралдир. $1 - \{k\}$ тартибли интегралдан ҳосила $[k] + 1$ тартибли интегралдир, $\{k\} - k$ нинг каср қисми, $[k] - k$ нинг бутун қисми [2]. k тартибли ҳосиланинг мавжудлиги учун $[k] + 1$ тартибли оддий ҳосиланинг мавжудлиги етарлидир.

Даражали функция ҳосиласи $y = x^n$, $n \in N$,

$$y' = nx^{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} x^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2},$$

$$k < n \quad y^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k},$$

$$\alpha < R, \quad y^{(\alpha)} = \frac{n!}{(n-\alpha)!} x^{n-\alpha},$$

$$D^{1/2}(c) = \frac{0!}{\Gamma\left(0 - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{0 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Ўтказилган таҳлил шуни кўрсатадики, таърифлардаги ёндашув Риман-Лиувилл интеграллари ёрдамида аниқланганда бир қатор муҳим қийинчиликларни келтириб чиқарар экан. Булар, масалан, анъанавий статистик усуллардан фойдаланишни имконсиз эканлиги ҳамда ностандарт хусусиятларини ўз ичига олади. Шунингдек, каср операторларига ўтишнинг

Ўзи ноаниқ эканлигини таъкидлаш жоиздир. Каср ҳисоб назарияси жадал ривожланмоқда интегро-дифференциал операторлари бутун сон бўлмаган ҳақиқий ва мураккаб қийматларни қабул қиладиган, вақтга ёки бошқа аргументларга кўпинча фазовий боғлиқ ёки ҳатто баъзиларига кўра тақсимланадиган оддий ва қисман ҳосилаларда интегро-дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари ишлаб чиқишни бошқариш ҳамда фракталлар назариясига ва бутун сон бўлмаган ўлчовларни математик таҳлилини амалга оширишда қўлланилган.

Хулоса ўрнида шуни айтиш мумкинки, мазкур тадқиқот интегро-дифференциал операторларнинг бутун сонли ва ўзгармайдиган тартибларини жорий этиш идентификация масалаларини структуравий-параметрик масалаларга айлантиради, чунки математик моделлар тенгламаларига киритилган интеграл ва ҳосилаларнинг бутун сон бўлмаган тартиблари билан боғлиқ бўлган тизимнинг бошқа эркинлик даражаси пайдо бўлади. Каср ҳисоб ва унинг математик таҳлили кенг миқёсда қўлланилмоқда.

Адабиётлар рўйхати

[1] Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М. Фракталлар назарияси ва фрактал графика // Ўқув қўлланма. Тошкент, 2020. 288 б.

[2] Назиров Ш.А., Анарова Ш.А., Нуралиев Ф.М. Фракталлар назарияси асослари. Тошкент-2017, «Навруз» нашриёти, 128 б.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АПРИОРНОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Анаков Ю.П., Муродуллаев Д.М.

Наманганский инженерно-строительный институт

e-mail: yusupjonapakov@gmail.com, dostonbekmurodullayev403@gmail.com

В области $D = \{(x; y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ рассмотрим вязко – транс-звуковое уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1)$$

где $p, q \in R$.

Задача А. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$, удовлетворяющего следующим краевым условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(p, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (3)$$

где $f(x, y) \in L_2(D)$, $f(x, 0) = f(x, q)$.

Теорема. Если $f(x, y) \in L_2(D)$, то имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)}. \quad (4)$$

Доказательство. Будем использовать норму из класса $L_2(D)$, [1–2].

Уравнение (1) умножим на функцию $u(x, y) \neq 0$, тогда имеем

$$u L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) - u_y^2 = u f(x, y). \quad (5)$$

Интегрируем (5) по области D , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, y) u_{xx}(x, y) - \frac{1}{2} u_x^2(x, y) \right] dx dy - \\ & + \int_0^p \int_0^q \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) u_y(x, y)] dx dy - \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = \iint_D u f dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая в равенстве (6) однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(p, y) dy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy = - \int_0^p \int_0^q u f dx dy.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(p, y) dy + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 = - \int_0^p \int_0^q u f dx dy. \quad (7)$$

Из (7) приходим к неравенству

$$\|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq \int_0^p \int_0^q (-u) f dx dy. \quad (8)$$

Используя формулу

$$u(x, y) = \int_0^y u_z(x, z) dz \quad \text{или} \quad u^2(x, y) = \left[\int_0^y u_z(x, z) dz \right]^2$$

и применяя формулу Коши-Буняковского, имеем

$$u^2(x, y) \leq q \int_0^q u_y^2(x, y) dy. \quad (9)$$

Интегрируя каждую часть в формуле (9), по x получим

$$\int_0^p u^2(x, y) dx \leq q \int_0^p \int_0^q u_y^2(x, y) dx dy, \quad \Rightarrow \int_0^p u^2(x, y) dx \leq q \|u_y\|_{L_2(D)}^2. \quad (10)$$

Интегрируя каждую часть в формуле (10), по y получим

$$\int_0^q \int_0^p u^2(x, y) dx dy \leq \int_0^q q \|u_y\|_{L_2(D)}^2 dy = q^2 \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \Rightarrow \|u\|_{L_2(D)}^2 \leq q^2 \|u_y\|_{L_2(D)}^2. \quad (11)$$

Учитывая (11) из (8), получим

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 \leq q^2 \int_0^p \int_0^q (-u) f dx dy. \quad (12)$$

Слагая (12) и (8), приходим

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq (1 + q^2) \int_0^p \int_0^q (-u) f dx dy. \quad (13)$$

В (13) используя неравенство $\forall \varepsilon > 0, |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, имеем

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq \frac{(1 + q^2)\varepsilon}{2} \int_0^p \int_0^q (-u)^2 dx dy + \frac{(1 + q^2)}{2\varepsilon} \int_0^p \int_0^q f^2 dx dy. \quad (14)$$

Из (14) используя норму, получим

$$\left[1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 + q^2)\right] \|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq \frac{(1 + q^2)}{2\varepsilon} \|f\|_{L_2(D)}^2.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/(1 + q^2)$, имеем $\frac{1}{2} \|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq \frac{(1 + q^2)^2}{2} \|f\|_{L_2(D)}^2$,

отсюда

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 + 2\|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq (1 + q^2)^2 \|f\|_{L_2(D)}^2 \quad \text{или} \quad \|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_y\|_{L_2(D)}^2 \leq C^2 \|f\|_{L_2(D)}^2, \quad (15)$$

здесь $C = 1 + q^2 > 0$.

В (15) отбросив второе слагаемое, приходим к неравенству

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 \leq C^2 \|f\|_{L_2(D)}^2, \quad \text{или} \quad \|u\|_{L_2(D)} \leq C \|f\|_{L_2(D)}. \quad (17)$$

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

[1] Алимов Ш.А. Об L_p решениях одной краевой задачи // Узбекский математический журнал. 1999. -№ 1. –С. 3-9.

[2] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, -№ 8. – С.1094-1100.

ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В ПОЛУПОЛАСЕ

Анаков Ю. П., Муталлиев А. Ф.

Наманганский инженерно-строительный институт

e-mail: yusupjonapakov@gmail.com, akbaralimutalliyev42@gmail.com

В области $D^+ = \{(x, y, z): 0 < x < +\infty, 0 < y < q\}$ рассмотрим уравнения

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x, y), \quad (1)$$

где $q, a_i \in R$, $g(x, y)$ – заданная достаточно гладкая функция.

Задача E. Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^+) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, имеющего ограничение первой производной по y и второй производной по x при $x \rightarrow +\infty$, и $u_y \in L_2(D^+)$, удовлетворяющего следующими краевыми условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (3)$$

где $\psi(y) \in C^3[0, q]$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,1}[0, q]$ – заданные достаточно гладкие функции причем

$$\psi(0) = \psi(q) = \psi''(0) = \psi''(q) = 0, \quad g(x, 0) = g(x, q) = 0.$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ – граница области D^+ .

Аналогичная задача в полуограниченных областях, при $a_1 = a_2 = 0$ исследованы в работах [1-4].

Теорема. Если задача E имеет решение, то при выполнении условий $a_2 > 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Тогда функция $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D .

В области D справедливо тождество

$$uL[u] = uu_{xxx} - uu_{yy} + a_1uu_x + a_2u^2 = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}a_1u^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 + a_2u^2 = 0. \quad (6)$$

Интегрируя тождество (6) по области $D_d = \{(x, y): 0 < x < d, 0 < y < q\}$, где $d > 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^d \int_0^q \frac{\partial}{\partial x} \left[u(x, y)u_{xx}(x, y) - \frac{1}{2}u_x^2(x, y) + \frac{1}{2}a_1u^2(x, y) \right] dx dy - \\ & - \int_0^d \int_0^q \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y)u_y(x, y)] dx dy + \iint_{D_d} u_y^2(x, y) dx dy + a_2 \iint_{D_d} u^2(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^q [u(d, y)u_{xx}(d, y) - u(0, y)u_{xx}(0, y)]dy - \frac{1}{2} \int_0^q [u_x^2(d, y) - u_x^2(0, y)]dy + \\ & + \frac{1}{2} a_1 \int_0^q [u^2(d, y) - u^2(0, y)]dy + \int_0^d [u(x, q)u_y(x, q) - u(x, 0)u_y(x, 0)]dx + \quad (7) \\ & + \iint_{D_d} u_y^2(x, y)dx dy + a_2 \iint_{D_d} u^2(x, y)dx dy = 0. \end{aligned}$$

Если $d \rightarrow +\infty$, то $D_d \rightarrow D^+$. При этом, учитывая однородные краевые условия задачи E и свойства функции $u(x, y, z)$ при $x \rightarrow +\infty$, из (7) получим

$$\frac{1}{2} \int_0^q u_x^2(0, y)dy + \iint_{D_d} u_y^2(x, y)dx dy + a_2 \iint_{D_d} u^2(x, y)dx dy = 0.$$

Отсюда, $u(x, y) \equiv 0$ в $(x, y) \in \overline{D}$. Теорема доказана.

Существования решения задачи E доказывается методом разделения переменных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

[1] Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.

[2] Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. - №2(22). –С. 147-151.

[3] Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2008. -№1. –С. 14-22

[4] Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, 156 стр.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

¹Ашуров Р.Р., ²Кадиркулов Б. Ж., ³Жалилов М.А.

¹Институт Математики, Ташкент, Узбекистана,

²Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент,
Узбекистан

³Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

e-mail: ashurovr@gmail.com, kadirkulovbj@gmail.com,

Пусть $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, ${}_C D_{0t}^\alpha = J_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt}$, $0 < \alpha \leq 1$ - интегро-

дифференциальный оператор Герасимова-Капуто, а J_{0t}^ν - интегральный оператор Римана-Лиувилля, которая определяется по формуле [1]

$$J_{0t}^\nu \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \varphi(\tau) d\tau, \nu > 0.$$

В области Ω рассмотрим следующую задачу:

Задача BS. Требуется найти пару функций $(u(x, t), g(x))$, из класса

$$u(x, t), t^{-\beta} {}_C D_{0t}^\alpha u(x, t), u_{xx}(x, t) \in C(\bar{\Omega}), g(x) \in C[0, 1]$$

удовлетворяющее в области Ω уравнению

$$t^{-\beta} {}_C D_{0t}^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + g(x)$$

и условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), u(x, T) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0, u_x(1, t) = u_x(x_0, t), 0 \leq t \leq T.$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные функции, β , x_0 - заданные действительные числа, причем $\beta > 0$, $0 < x_0 < 1$.

В данной работе для вырождающегося параболического уравнения дробного порядка с оператором Герасимова-Капуто изучается нелокальная обратная задача типа Бицадзе-Самарского [2]. Для решения задачи используется спектральный метод, с помощью которого рассматриваемая задача сводится к исследованию спектральной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно пространственной переменной. Исследованы спектральные вопросы полученной, а также сопряженной задачи, при этом дифференциальный оператор, соответствующий сопряженной задаче, получается разрывной. Найдены собственные числа, а также системы собственных функций задач, доказана полнота, а в случае иррациональности x_0 доказана базисность Рисса полученных систем [3]. Далее, при определенных условиях на заданные функции, доказаны теоремы

единственности и существования решения поставленной задачи. При доказательстве единственности решения задачи используется полнота системы собственных функций соответствующей спектральной задачи, а решение задачи построено в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда.

Литература

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations (North-Holland Mathematics Studies, 204). - Amsterdam: Elsevier, 2006. - 523 p.

[2] А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. // Докл. АН СССР. - 1969. -Т. 185. № 4. - С. 739–740.

[3] Н.К. Бари. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. Зап.МГУ. -1951.- т. 148.- вып. 4.- С. 69 - 107.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РАСТУЩИХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ашурова З. Р., Жуманов С.Ш.

Самаркандский Государственный Университет, Самарканд, Узбекистан

e-mail: ashurovazebiniso@samdu.uz

Работа посвящена задаче Коши для полигармонического уравнения порядка n , именно рассмотрена задача продолжения полигармонической функции $u(x)$ во внутрь области когда на части границы задаются значения функции и лапласианов этой функции до $(n-1)$ -го порядка и нормальные производные от этих лапласианов.

Пусть R^m - m -мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)$, $x \in R^m$, $y \in R^m$

$x' = (0, x_2, \dots, x_{m-1})$, $y' = (0, y_2, \dots, y_{m-1})$, $r = |x - y|$, $s = |x' - y'|$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, $\alpha^2 = s$

D -неограниченная область лежащая в слое $\{y : y = (y_1, y_2, \dots, y_m), (y_1, y_2, \dots, y_m) \in R^m, 0 < y_m < h\}$ с границей

$\partial D = L \cup S$, $L = \{y : y_m = 0\}$, $S = \{y : y_m = f(y_1, \dots, y_{m-1})\}$ где $f(y_1, \dots, y_{m-1})$

имеет ограниченные частные производные первого порядка.

Задача Коши.

Пусть

$$u \in C^{2n}(D) \text{ и } \Delta^n u(y) = 0, y \in D \quad (1)$$

$$u(y) = F_0(y), \quad \Delta u(y) = F_1(y), \dots, \Delta^{n-1} u(y) = F_{n-1}(y), \quad y \in S$$

$$\frac{du(y)}{d\bar{n}} = G_0(y), \quad \frac{d\Delta u(y)}{d\bar{n}} = G_1(y), \dots, \frac{d\Delta^{n-1} u(y)}{d\bar{n}} = G_{n-1}(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

где $F_i(y)$, $G_i(y)$ заданные на ∂D непрерывные функции, $\bar{n}$ - внешняя нормаль к ∂D . Требуется восстановить $u(y)$ в D .

При произвольных начальных данных задача неразрешима. Если часть границы и начальные данные аналитичны и аналитически продолжим во внутрь области то продолжение существует и единственно, но не устойчиво. По этому оно относится к числу некорректно поставленных задач. Первый результат в этом направлении в 1926 году получил Карлеман, для класса ограниченных функций. Еще в 1943 году Тихонов указал на практическую важность неустойчивых задач и показал что если сузить класс возможных решений до компакта, то задача становится устойчивой.

Основываясь на исследованиях Лаврентьев ввел важное понятие функцию Карлемана и с ее помощью построил регуляризацию задачи. С помощью метода Лаврентьева Ярмухамедов получил регуляризацию и разрешимость задачи Коши для уравнения Лапласа в ограниченных областях. В этом докладе построена регуляризация задачи Коши для полигармонических функций.

Будем предполагать, что решение $u(y)$ задачи (1)-(2) существует и непрерывно дифференцируемо, $2n-1$ раз вплоть до конечных точек границы и удовлетворяет определенному условию роста (класс корректности), который обеспечивает единственность решения.

Функции $\phi_\sigma(y, x)$ и $\Phi_\sigma(y, x)$ при $s > 0, \sigma \geq 0$ определим следующими видами: если $m = 2k, k = 2, 3, \dots$ то

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} (k-2)! \phi_\sigma(y, x) K(x_m) &= \frac{d^{k-2}}{ds^{k-2}} \operatorname{Im} \left[\frac{K(\omega)}{\sqrt{s}(\omega - x_1)} \right], \omega = i\sqrt{s} + y_1 \\ K(\omega) &= \frac{\exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2))}{(\omega + x_m + 3h)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

Если $m = 2k+1, k = 2, 3, \dots$ то

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} 2^{-k} (k-2)!! \phi_\sigma(y, x) K(x_m) &= \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \operatorname{Im} \int_0^\infty \left[\frac{K(\omega)}{\omega - x_1} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \omega = i\sqrt{s+u^2} + y_1 \\ K(\omega) &= \frac{\exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2))}{(\omega + x_m + 3h)^{n+1}} \end{aligned} \quad (4)$$

При всех нечетных $m \geq 3$, а также четных m с условием $2n < m$, полагаем $\Phi_\sigma(y, x) = C_{n,m} r^{2(n-1)} \phi_\sigma(y, x)$, $C_{n,m} = (-1)^{n-1} (\Gamma(\frac{m}{2} - n) 2^{2n} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(n))^{-1}$

Теорема 1. Функция $\Phi_\sigma(y, x)$, определяемая при помощи формулы (3)-(4) является полигармонической функции порядка n по y при $s > 0$ и функцией Карлемана для точки $x \in D$ и части $\partial D \setminus S$, её можно написать следующим виде

$$\Phi_{\sigma}(y, x) = C(r^{2n-m} + r^{2n-2}G(y, x)),$$

где $G(y, x)$ - гармоническая функция по переменной y включая точку x во всем пространстве R^m .

Обозначим через $B_{\rho_2}(D)$ пространство полигармонических функций определенных в D порядка n , имеющие непрерывные частные производные порядка $2n-1$ вплоть до конечных точек границы ∂D и удовлетворяющих условию:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (|\Delta^k u(y)| + |\operatorname{grad} \Delta^{n-k-1} u(y)|) \leq C \exp(\exp \rho_2(y')). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть для функции $u \in B_{\rho_2}(D)$ в любой точке $y \in \partial D$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^k u(y)| + \left| \frac{\partial \Delta^{n-1-k} u(y)}{\partial \bar{n}} \right| \leq C \exp \left(a \cos \rho_3 \left(y_1 - \frac{h}{2} \right) \exp \rho_3 |y'| \right) \quad (6)$$

где $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho$.

Тогда для любой точки $x_0 \in D$ имеет место равенство

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial D} \left[\Delta^k \Phi(y, x_0) \frac{\partial \Delta^{n-1-k} u(y)}{\partial \bar{n}} - \Delta^{n-1-k} u(y) \frac{\partial \Delta^k \Phi(y, x_0)}{\partial \bar{n}} \right] ds.$$

Литература

- [1] Yarmukhamedov Sh.Ya. The Cauchy problem for the polyharmonic equation. Reports of the Russian Academy of Sciences. 2003. Vol. 388. pp. 162-165.
- [2] Ashurova Z.R., Juraeva N.Yu., Juraeva U.Yu. About some properties of the Yarmukhamedov kernel. International Journal of Innovative Research. 2021, Impact Factor 7.512. Vol. 10. pp. 84-90
- [3] Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews. India 2020. DOI 10.31938/jcr.07.06.62. Vol. 7. pp. 371-378.
- [4] Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function. Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra. 2020. URL <http://saarj.com> Vol. 10. pp. 371-378.
- [5] Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. The Carleman function and the Cauchy problem for polyharmonic functions. Lap LAMBERT Academic publishing Saabrucen. 2013. 96 p.
- [6] Jurayeva U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp. 54-61. DOI: 10.29229/uzmj.2022-3-7.
- [7] Жураева У. Ю., Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, Изв. вузов. Матем., 2022, номер 10, 42–65. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-10-42-65>

НОВЫЕ КЛАССЫ СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Бегматов А. Х.

*Совместный Белорусско-Узбекский межотраслевой институт
прикладных технических квалификаций
e-mail: akrambegmatov@mail.ru*

Задачи интегральной геометрии естественным образом возникают при исследовании многих математических моделей в таких имеющих обширные применения областях, как сейсморазведка, интерпретация данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, различных процессах, описываемых кинетическими уравнениями и т.д. Разработанный здесь аппарат является математической базой вычислительной томографии - перспективного и интенсивно развивающегося направления современной науки.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $u(x)$ – достаточно гладкая функция, определенная в n – мерном пространстве $x = (x_1, \dots, x_n)$, и $\{M(\lambda)\}$ – семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int_{M(\lambda)} u(x) d\sigma = v(\lambda), \quad (1)$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $M(\lambda)$. Требуется по функции $v(\lambda)$ найти функцию $u(x)$.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [2].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [4].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах получены в [5].

В работах [5-6] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью.

Введем обозначения:

$$x \in R^2, \xi \in R^2, \lambda \in R^1, \mu \in R^1, R_+^2 = \{x = (x_1, x_2): x_2 \geq 0\},$$

$$\Omega = \{x \in R_+^2: 0 < x_2 < l\},$$

здесь, $0 < l < \infty$.

В полосе Ω рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1, x_2) = \{(\xi_1, \xi_2): x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех (x_1, x_2) из полосы Ω известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int_{x_1 - \sqrt{x_2}}^{x_1 + \sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \psi(x_1, x_2, \xi_1)) d\xi_1 = f(x_1, x_2),$$

где $g(x_1, \xi_1) = |x_1 - \xi_1|$.

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^\infty e^{-i\mu\tau} \cos \lambda \sqrt{\tau} d\tau, \quad I_1(\lambda, x_2 - \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu(x_2 - \xi_2)} \frac{d\mu}{(1 + \mu^4) I(\lambda, \mu)}$$

$$I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda(x_1 - \xi_1)} I_1(\lambda, x_2 - \xi_2)}{(1 + \lambda^4)} d\lambda.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ известна для всех $(x_1, x_2) \in \Omega$. Тогда решение задачи 1 в классе восемь раз непрерывно дифференцируемых финитных в полосе Ω функций единственно, выражается через функцию $f(x_1, x_2)$ по формуле

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_2(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4}\right) \left(1 + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}\right) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{W_2^{4,4}(\Omega)},$$

где $0 < C_1$ – некоторая постоянная.

Литература

- [1] Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Издательство Института Математики, Новосибирск 2010, — 912 с.
- [2] Лаврентьев М. М. Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // Сиб. мат. Журн. - 1996. - Т. 37. С. 851-857.
- [3] Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР. 1967. 173:4, С.766--769.
- [4] Бегматов А.Х., “О единственности решения задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа на плоскости”, Доклады Академии Наук, 427:4 (2009), 439–441

[5] Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Задача интегральной геометрии в полосе с весовой функцией // Научный вестник СамГУ, 117:5 (2019), 12-17.

[6] Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S. On a problem of integral geometry over a family of parabolas with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association 27 (4), 497-509, 2021.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Бекиев А.Б., Отарова Ж.А.

Каракалтакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

e-mail: ashir1976@mail.ru, j.otarova@mail.ru

Параболические уравнения лежат на основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике и многих других областях знаний [1]. Для широких классов уравнений решены принципиальные проблемы разрешимости и единственности решений различных краевых задач, подробно изучены дифференциальные свойства решений. Нелокальные задачи возникают при математическом моделировании различных физических, химических, биологических и экологических явлений, когда вместо классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри неё. Подобные ситуации имеют место при изучении широкого круга явлений: процессов происходящих в плазме; процессов распространения тепла; некоторых технологических процессов; процессов влаг переноса в пористых средах; в задачах математической биологии и демографии. В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. В данной работе рассмотрена краевая задача для параболического уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями. Корректность краевых задач для уравнений с частными производными четвертого порядка устанавливается доказательством существования и единственности решения.

Постановка задачи. В области $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + b^2 u(x, t) = f(x, t)$$

где $b = \text{const}$, $f(x, t)$ -заданная функция.

Задача 1. Найти в области Ω функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega), \quad (1)$$

$$Lu \equiv f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(0,t)=u(1,t), u_x(0,t)=0, u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t), u_{xxx}(0,t)=0, 0 \leq t \leq \beta, \quad (4)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0)=\varphi(1), \psi(0)=\psi(1), \varphi'(0)=0, \psi'(0)=0$.

Система функций

$$X_0(x)=1, X_{2k-1}(x)=\cos \lambda_k x, X_{2k}(x)=x \sin \lambda_k x, \quad (5)$$

$$\lambda_k = 2k\pi, k=1,2,\dots$$

и

$$Y_0(x)=2(1-x), Y_{2k-1}(x)=4(1-x)\cos \lambda_k x, Y_{2k}(x)=4x \sin \lambda_k x, \quad (6)$$

$$\lambda_k = 2k\pi, k=1,2,\dots$$

биортогонально и образуют базис Рисса в $L_2[0,1]$ [2, 3].

Решение задачи (1)-(4) найдено в виде ряда составленной из базисных функций Рисса (5). Единственность решения задачи вытекает из полноты ортонормированных систем (6).

Теорема 1. Если выполняются условия $\varphi(x) \in C^{(6)}[0,1]$, $\varphi^{(2i)}(0)=\varphi^{(2i)}(1), \varphi^{(2i+1)}(0)=0, i=0,1,2,$ $\psi(x) \in C^{(4)}[0,1], \psi^{(2i)}(0)=\psi^{(2i)}(1), \psi^{(2i+1)}(0)=0, i=0,1,$ $f(x,t) \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}), \frac{\partial^{2i} f(0,t)}{\partial x^{2i}} = \frac{\partial^{2i} f(1,t)}{\partial x^{2i}}, i=0,1, \frac{\partial f(0,t)}{\partial x} = 0$

то, существует единственное решение задачи (1)-(4).

Литература

[1] Самарский А.А., Михайлов А.П., Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.- М.: Физматлит., 1997.-320 с.

[2] Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни-Люка с нелокальными условиями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2019, том 29, выпуск 2, с. 166–182.

[3] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. 2011. № 2. С. 71–85.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ УСЛОВИИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

¹Джамалов С. З., ¹Сипатдинова Б.К., ²Мамбетсапаев К.А.

¹Институт математики имени В.И.Романовского, Узбекистан,

²Филиал Российского Государственного Университета нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина в Ташкенте

e-mail: siroj63@mail.ru, sbiybinaz@mail.ru, mr.kurbaniyaz@gmail.com.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными

задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [1]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучены в монографии [2]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода второго порядка в неограниченных областях [3,4], а для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях обратные задачи практически не исследованы.

Для решения данной проблемы в настоящей работе, по исследованию однозначной разрешимости обратных задач для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде предлагается метод, который основан на приведении обратных задач к прямым с полупериодическим краевым условием для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в ограниченной прямоугольной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [5].

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); \quad x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u_t + c(x,t)u = \psi(x,t,z), \quad (1)$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа и пусть $k(0) \leq 0 \leq k(T)$. Здесь $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ - заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [6].

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z), h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полу периодическим краевым условием

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0, 1, \quad (3)$$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\bar{Q}$. (4)

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0(x,t), \quad \text{где } \ell_0 \in R \quad (5)$$

а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) | u \in W_2^{2,3}(G); h \in W_2^2(Q)\}.$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x, t, \lambda)\|_{W_2^2(Q)}^2 d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \|\mathcal{G}\|_{W_2^2(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 2} \int_Q |D^\alpha \mathcal{G}|^2 dx dt.$$

Здесь α – мультииндекс, D^α – обобщённая производная по переменным x и t ,

$$\hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z , функции $u(x, t, z)$.

Литературы

[1] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск. Наука, С.1969–67

[2] Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021г, С.176.

[3] Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Kh.Sh. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, T.42.№15, pp. 3606–3615.

[4] Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, T.42.№1, pp.1–12.

[5] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения. Дифференц, уравнения, 1983, Т.19, е1, С.86Ц94.

[6] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.с.8

КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, ПОДВЕРГАЮЩЕГОСЯ ИМПУЛЬСНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ В ФИКСИРОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Елгондиев К.К., Матмуратова С.Р.

Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

Общий случай. Предположим, что эластичная мембрана с закрепленными краями совпадает с некоторой областью G ограниченной кривой Γ плоскости Oxy . В некоторые фиксированные моменты времени

$t_k, k = 1, 2, \dots$ мембрана, подвергается воздействию импульсной природы $I_k(x, y), k = 1, 2, \dots$, соответственно.

В таких случаях колебания мембраны описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad t \neq t_k, \quad (1)$$

условием импульсного воздействия

$$\Delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_k} = \frac{\partial u(t_k+0)}{\partial t} - \frac{\partial u(t_k-0)}{\partial t} = I_k(x, y), \quad (2)$$

начальным условием

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

и краевым условием

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу построения методом Фурье решения уравнения (1), удовлетворяющую начальному условию (3), условиям импульсных воздействий (2), а также краевому условию (4), в предположении, что моменты импульсных воздействий $t_k, k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют условию $t_k > t_m$ при $k > m$ и $t_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Решение поставленной задачи согласно методу Фурье будем искать в виде

$$u(x, y, t) = T(t) \cdot V(x, y). \quad (5)$$

При этом относительно функций $V(x, y)$ получаем задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta V(x, y) + \lambda V(x, y) = 0, \\ V(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Функцию $T(t)$ находим как решения дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - a^2 \lambda T(t), \quad t = t_k$$

С импульсным воздействием

$$\Delta \frac{dT_n}{dt} \Big|_{t=t_k} = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \int I_k(x, y) V_n(x, y) dx dy,$$

при начальных условиях

$$T_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi(x, y) V_n(x, y) dx dy \\ T'_n(0) = \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G \varphi_1(x, y) V_n(x, y) dx dy.$$

где $N^2(V_n) = \int_G V_n^2(x, y) dx dy$, $V_n(x, y)$ – собственные функций задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, соответствующее собственным значениям этой задачи.

Решение задачи (1)-(4) получена в виде ряда Фурье

$$U(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_{n0} \cos a\mu_n t + \frac{\sigma'_{n0}}{a\mu_n} \sin a\mu_n t \right) V_n(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x, y)}{a\mu_n} \sum_{0 < t_k \leq t} \gamma_{nk} \sin a\mu_n (t - t_k).$$

Эффект импульсных воздействий на процесс колебания мембраны выражается рядом

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n(x, y)}{a\mu_n} \sum_{0 < t_k \leq t} \gamma_{nk} \sin a\mu_n (t - t_k). \\ \gamma_{nk} &= \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G V_n(x, y) I_k(x, y) dx dy \\ \sigma_{n0} &= \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G V_n(x, y) \varphi(x, y) dx dy \\ \sigma'_{n0} &= \frac{1}{N^2(V_n)} \int_G V_n(x, y) \varphi_1(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, -2004. 792 с.
- [2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. World Scientific Series on Non-Linear Sciences. Ser. A. V.14. –Singapore: World Scientific. -1995. 462 p.
- [3] Самойленко В.Г., Елгондиев К.К. Исследование линейных дифференциальных уравнений в R^2 . Припринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.59. Киев, 1989. 32 с.
- [4] Samoilenko V.Hr., Yelgondiyev K.K. On existence of periodical solutions for differential equations with impulsive effects// *Jorn. Facta Universitatis / Series: Mechanics, automatic control and robotics*, 1998. №2(2). P.635-639.
- [5] Елгондиев К.К. Распространение тепла в однородном шаре по действием импульсных источников. // Докл. АН Руз. 2003, №1. –С.18-20.
- [6] Elgondiyev K.K., Kurbanbaev O.O. , Matmuratova S.R. String oscillations with impulsive effects// *Karakalpak Scientific journal*, 03.03.2020, Vol.3, p.46-52

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Иброхимов Х. К., Лутфиллов Ж. М., Алохонов Х. А.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан

e-mail: xusniddin571@mail.ru

Теория уравнений смешанного типа, основоположником которой является Ф. Трикоми, в настоящее время превратилась в один из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Число работ, посвященных исследованиям различных краевых задач для уравнений смешанного типа достаточно велико, один из таких задач является задача Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве, которое с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована А.В.Бицадзе [1]. Затем появились ряд работ А.М.Нахушева, А.М.Ежова, С.П.Пулькина, С.М.Пономарева, где рассматривались краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области. Краевые задачи для смешанных уравнений парабола - гиперболического типа в трехмерном пространстве, используя интегральные преобразования рассматривались в работах Т.Д.Джураева, А.Сопуева [2].

В бесконечной призмаобразной области Ω^1 , трехмерного евклидова пространстве переменных (x, y, z) , ограниченной поверхностью $S = \sum_{n=1}^7 S_n$, где

$$\begin{aligned} S_1: x=0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in R, \quad S_2: x=1, \quad 0 \leq y \leq h, \quad z \in R, \quad S_3: x+y=0, \quad z \in R, \\ S_4: x+y=\varepsilon_1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 1, \quad z \in R, \quad S_5: x-y=\varepsilon_1, \quad z \in R, \\ S_6: x-y=1, \quad z \in R, \quad S_7: y=h, \quad h>0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z \in R, \end{aligned}$$

рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} + \mu_1^2 U, & \text{при } y > 0, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} + \mu_2^2 U, & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad \mu_i^2 = \text{const}, \quad i=1,2. \quad (1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \Omega^1 \cap (y > 0), \quad \Omega_2^1 = \Omega^1 \cap \{(x, y, z), \quad 0 < x < \varepsilon_1, \quad y < 0, \quad z \in R\}, \\ \Omega_3^1 = \Omega^1 \cap \{(x, y, z), \quad \varepsilon_1 < x < 1, \quad y < 0, \quad z \in R\}, \quad D^1 = \Omega^1 \cap (z = 0), \\ D_1 = \Omega_1 \cap (z = 0), \quad D_n^1 = \Omega_n^1 \cap (z = 0), \quad n = \overline{2,3}, \quad \sigma_n = S_n \cap (z = 0), \quad n = \overline{1,7}, \\ \overline{I_0} = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2^1}, \quad \overline{J_1} = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_3^1}, \quad j_n = J_n \cap (z = 0), \quad n = \overline{0,1}, \quad j_n = \overline{j_0} \cap \overline{j_1}. \end{aligned}$$

Задача G_α . Найти регулярное в области $\Omega^1 \setminus (y=0)$ решение уравнения (1) обладающее следующими свойствами:

$$1) U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2^1 \cup \overline{\Omega}_3^1) \cap C^1[(\Omega_1 \cup J_0 \cup J_1) \cup \\ \cup (\Omega_2^1 \cup J_0) \cup (\Omega_3^1 \cup J_1)] \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2^1 \cup \Omega_3^1);$$

2) $U(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{cases} U|_{S_1} = \Phi_1(y, z), & U|_{S_2} = \Phi_2(y, z), \\ U|_{S_3} = \Psi_1(x, z), & U|_{S_4} = \Psi_2(x, z), \end{cases} \quad z \in R, \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0. \quad (3)$$

3) функции $U(x, y, z)$ и $U_y(x, y, z)$ удовлетворяет условиям склеивания

$$\begin{aligned} U(x, -0, z) &= \alpha U(x, +0, z), \\ U_y(x, -0, z) &= \beta_k(x) U_y(x, +0, z) + \gamma_k(x) U(x, +0, z) + P_k(x, z), \\ \alpha &= \text{const} > 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P_k(x, z) = 0, \quad (x, z) \in J_k, \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

Решение задачи G_α следуя идеи А.В.Бицадзе [1], решение поставленной задачи будем искать в классе интегралов Фурье.

Отметим, что аналогичная задачи исследована в работах [3-5].

Единственность решений задачи G_α доказывается, используя принцип максимума для параболических и гиперболических уравнений получением априорных оценок искомых решений. Существование решения задачи G_α эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи G_α .

Список литературы

- [1] Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. мат. журн. 1962. Т.3. С.642-644.
- [2] Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения, смешанного параболо - гиперболического типа // Дифф. уравн. Минск. 1981. Т.17. № 1. С. 50-57.
- [3] Джураев Т.Д., Сопуев А., Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения тип // В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Институт математика АН УзССР. Ташкент: Фан. 1987. С.56-65.
- [4] Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Задача Геллерстедта для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Дифференциальные уравнения. 1990. 26-том, №3. С. 438-448.
- [5] Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К. Трехмерный аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Вестник НамГУ, 2021. № 5. С. 39-48.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

¹Имомназаров Б.Х., ²Эркинова Д.А., ³Худайназаров Б.Б.

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия,

²Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан,

³Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: imom@omzg.sccc.ru, dinora980104@mail.ru

Нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений представляют несомненный практический и теоретический интерес, поскольку многие физические явления только при определенных ограничениях могут описываться системами линейных уравнений. В последние десятилетия, математики становятся все более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с учетом различных кинетических параметров. Эти проблемы возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с малыми вязкостями).

Аналогия уравнению Хопфа возникает, например, при исследовании слабо-нелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссипацией энергии. Другими словами, эти члены, обеспечивают непрерывность решений и представляют диссипативные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [1].

Рассматриваемая система является частным случаем системы уравнений двухскоростной гидродинамики в одномерном случае [2, 3].

В настоящем докладе рассматривается следующая система ОДУ, возникающая при приближенном решении одномерной системы типа Хопфа на конечном отрезке с помощью тригонометрического многочлена [4]. Данная система относительно амплитуды при $N = 2$ имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1' &= b_1 a_2 - b(a_1 - \tilde{a}_1), & b_1' &= a_1 b_2 - b(b_1 - \tilde{b}_1), & a_2' &= -a_1^2 - b(a_2 - \tilde{a}_2), \\ b_2' &= -b_1^2 - b(b_2 - \tilde{b}_2), & \tilde{a}_1' &= \tilde{b}_1 \tilde{a}_2 + \varepsilon b(a_1 - \tilde{a}_1), & \tilde{b}_1' &= \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 + \varepsilon b(b_1 - \tilde{b}_1), \\ \tilde{a}_2' &= -\tilde{a}_1^2 + \varepsilon b(a_2 - \tilde{a}_2), & \tilde{b}_2' &= -\tilde{b}_1^2 + \varepsilon b(b_2 - \tilde{b}_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где b и ε -- положительные постоянные.

Стационарные точки системы (1) определяются системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} b_1 a_2 - b(a_1 - \tilde{a}_1) &= 0, & a_1 b_2 - b(b_1 - \tilde{b}_1) &= 0, & b_1^2 + b(b_2 - \tilde{b}_2) &= 0, \\ \tilde{b}_1 \tilde{a}_2 + \varepsilon b(a_1 - \tilde{a}_1) &= 0, & \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 + \varepsilon b(b_1 - \tilde{b}_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{a}_1^2 - \varepsilon b(a_2 - \tilde{a}_2) = 0, \quad \tilde{b}_1^2 - \varepsilon b(b_2 - \tilde{b}_2) = 0.$$

Умножим третье уравнение на ε и полученный результат сложим с седьмым уравнением. Аналогично четвертое уравнение умножим на ε и полученный результат сложим с восьмым уравнением. В итоге имеем $\varepsilon a_1^2 + \tilde{a}_1^2 = 0$, $\varepsilon b_1^2 + \tilde{b}_1^2 = 0$. Следовательно, $a_1 = \tilde{a}_1 = b_1 = \tilde{b}_1 = 0$. А из последних двух уравнений системы (2) получим $a_2 = \tilde{a}_2 = A$, $b_2 = \tilde{b}_2 = B$, где A , B -- произвольные постоянные.

Уравнения малых колебаний около стационарной точки $a_1 = \tilde{a}_1 = b_1 = \tilde{b}_1 = 0$, $a_2 = \tilde{a}_2 = A$, $b_2 = \tilde{b}_2 = B$, получаем заменой $a_1 = A_1$, $\tilde{a}_1 = \tilde{A}_1$, $b_1 = B_1$, $\tilde{b}_1 = \tilde{B}_1$, $a_2 = A + A_2$, $\tilde{a}_2 = A + \tilde{A}_2$, $b_2 = B + B_2$, $\tilde{b}_2 = B + \tilde{B}_2$, $A_2 \ll A$, $\tilde{A}_2 \ll A$, $B_2 \ll B$, $\tilde{B}_2 \ll B$ (далее считаем, что A и B положительные), с удержанием членов первого порядка малости. Особенностью полученной линейной системы являются функции $A_1, \tilde{A}_1, B_1, \tilde{B}_1$, $A_2, \tilde{A}_2$ и $B_2, \tilde{B}_2$ удовлетворяют независимым системам ОДУ. Общее решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\tilde{D}_1 + \tilde{C}_1 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \sin \sqrt{AB}t + \frac{\tilde{D}_2 + \tilde{C}_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \cos \sqrt{AB}t, \quad A_2 = \frac{C_1 + C_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon}, \\ \tilde{A}_1 &= \frac{\tilde{D}_1 - \varepsilon \tilde{C}_1 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \sin \sqrt{AB}t + \frac{\tilde{D}_2 - \varepsilon \tilde{C}_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \cos \sqrt{AB}t, \quad \tilde{A}_2 = \frac{C_1 - \varepsilon C_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon}, \\ B_1 &= \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\tilde{D}_2 + \tilde{C}_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \sin \sqrt{AB}t - \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\tilde{D}_1 + \tilde{C}_1 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \cos \sqrt{AB}t, \\ \tilde{B}_1 &= \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\tilde{D}_2 - \varepsilon \tilde{C}_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \sin \sqrt{AB}t - \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\tilde{D}_1 - \varepsilon \tilde{C}_1 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon} \cos \sqrt{AB}t, \\ B_2 &= \frac{D_1 + D_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon}, \quad \tilde{B}_2 = \frac{D_1 - \varepsilon D_2 e^{-(1+\varepsilon)bt}}{1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, D_1, D_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ -- произвольные постоянные.

Список используемых источников

- [1] Куликовский А.Г., Свешников Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений, Москва -2010.
- [2] Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Изд-во ОИГТМ СО РАН, 1994. 183 с.
- [3] Imomnazarov B.Kh., Turdiev U.K., Erkinova D.A. Weak approximation method for the Cauchy problem for a one-dimensional system of Hopf-type equations // Mathematical Notes of NEFU, 2022, 29(4), pp. 11–20.
- [4] Шабат А.Б. О периодических решениях уравнений Хопфа // ТМФ, 2013, т. 177, No. 2, С. 222-230.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ПУАНКАРЕ НА ПЛОСКОСТИ

¹Имомназаров Х.Х., ²Худайназаров Б.Б.

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия,
²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: imom@omzg.sccc.ru, behzodxudaynazarov@gmail.com

При исследовании свойств функций из Соболевских пространств важную роль играет так называемое неравенство Пуанкаре (названное в честь французского математика Анри Пуанкаре). Это неравенство позволяет ограничить функцию на основе оценки ее производных и геометрии области определения. Эти оценки имеют большое значение для современного вариационного метода решения задач математической физики.

При исследовании внешней задачи Стокса для области $\Omega \subset R^2$ существенно используется неравенство Пуанкаре [1]. В [2] показано, что задача Стокса задачи однозначно разрешимо для широкого класса источников (правых частей). При разрешимости было использовано следующее неравенство Пуанкаре (с параметром y)

$$\int_{\Omega} \frac{u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \ln^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \leq 4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}, \quad \Omega \subset R^2, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 1 \text{ для всех } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

справедливых для $\forall u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ -- всех бесконечно дифференцируемых векторных полей с компактными носителями, содержащихся в Ω . Данное неравенства примечательно и полезно тем, что входящее в него постоянное не зависит от размера области для финитной функции $u(\mathbf{x})$. Неравенство (1) доказано в работе Ж. Лерэ [1].

Есть другие неравенства Пуанкаре. В работе [4] изучаются некоторые задачи классической математической физики в полном евклидовом пространстве. Хорошо известно, что в этом случае при изучении дифференциальных уравнений в шкале пространств Соболева возникает, как правило, препятствие, а именно отсутствие факторизационного неравенства Пуанкаре. Для преодоления этого препятствия в рамках весовых факторизационных неравенств типа неравенств Фридрихса, выбирается вместо параметра y параметр факторизации - средние значения функции на какой-либо сфере фиксированного радиуса.

В данном докладе доказано аналогичное неравенство Пуанкаре (1) с введением параметра β . А именно справедливо следующее неравенство

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2 e^{2(1+|\mathbf{x}|)^\beta} \ln^2(1+|\mathbf{x}|)} \leq 4 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}, \quad \Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| \geq \varepsilon\} \subset R^2$$

справедливых для $\forall u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\beta \geq \beta_0$, где β_0 выбирается из условия

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega_c} f(\mathbf{x}) \geq 1, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|}{1+|\mathbf{x}|} e^{(1+|\mathbf{x}|)^{\beta_0}}.$$

Список используемых источников

- [1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Наука, М., 1970, 288 с.
- [2] Ладыженская О.А., Солонников В. А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, том 59, 81-116.
- [3] Imomnazarov B.Kh., Turdiev U.K., Erkinova D.A. Weak approximation method for the Cauchy problem for a one-dimensional system of Hopf-type equations // Mathematical Notes of NEFU, 2022, 29(4), pp. 11–20.
- [4] Дубинский Ю.А. Двусторонние шкалы неравенств Харди и их приложения к некоторым задачам математической физики // СМФН, 2012, т. 46, с. 49-91.

АКСИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТИПА ХОПФА

¹Имомназаров Х.Х., ²Эркинова Д.А.

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия,

²Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан
e-mail: imom@omzg.sgcc.ru, dinora980104@mail.ru

Значительное количество математических постановок различных задач естествознания обладает свойством пространственной локальности, т.е. наиболее важные изменения изучаемых характеристик сосредоточены в весьма ограниченной области пространства. При этом, как правило, определяющие динамические уравнения с частными производными заданы во всем пространстве, а соответствующие им краевые условия фактически определяют асимптотику искомых решений на бесконечности. Такие задачи возникают, например в гидродинамике [1], физики плазмы [2], лазерной физики [3] и других областях естествознания. Например, когда пространственная локальность порождается аксиальной симметрией постановки, т.е. при использовании цилиндрических координат ярко выражено убывание решений по радиальному направлению. Аналогичная ситуация возникает в задачах геофизики при изучении околоскважинного пространства. При численном моделировании такого сорта явлений, как правило, демонстрирует первостепенную значимость поведения функций на оси (например, эффекты типа самофокусировки или самоканалирования; см. [3] и цитированную там литературу). Однако для вычисления аксиальных характеристик приходится проводить расчеты “полных” задач, т.е. в достаточно большой области изменения радиальной переменной по сравнению с характерными масштабами процесса.

Такая ситуация вызывает естественную неудовлетворенность: если по существу дела требуется решение только на оси, зачем решать “полную”

задачу? Кроме того, сразу появляется проблема повышения эффективности используемых вычислительных алгоритмов, так как типичные задачи сильно нелинейны, а соответствующие методы их решения весьма трудоемки и сложны в реализации [4]. Вышесказанное означает безусловную актуальность исследования задач аксиальных решений, обладающих свойством пространственной локальности.

В настоящем докладе рассматривается нахождение аксиальных решений задач из области моделирования двухжидкостных взаимодействий. Основой для моделирования служит система гидродинамических уравнений для двухжидкостной среды [5, 6]. Для моделирования аксиальных решений некоторых нелинейных систем уравнений, описывающих пространственные аксиально симметричные лазер-плазменные взаимодействия, сформулированы и численно исследованы “усеченные” задачи. В последние десятилетия, математики становятся все более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с учетом кинетических параметров. Эти проблемы возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с диссипацией энергий системы). В плоском случае аксиальная симметрия, конечно, не предполагается, однако в целях удобства будем использовать это название для вещественных решений системы уравнений типа Хопфа [7, 8] вида

$$u(t, x) = U(t)x, \quad \tilde{u}(t, x) = \tilde{U}(t)x.$$

И изучим полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $U(t)$, $\tilde{U}(t)$:

$$U' + U^2 = -b(U - \tilde{U}), \quad \tilde{U}' + \tilde{U}^2 = -\varepsilon b(U - \tilde{U}), \quad (1)$$

где b и ε -- положительные постоянные.

Можно показать, что система (1) имеет только одну особую точку $U = \tilde{U} = 0$. Соответствующая линейная система имеет общее затухающее (изохронное) решение

$$U = \frac{C_2 + C_1 e^{-b(1+\varepsilon)t}}{1 + \varepsilon}, \quad \tilde{U} = \frac{C_2 - \varepsilon C_1 e^{-b(1+\varepsilon)t}}{1 + \varepsilon}.$$

Список используемых источников

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. -М.: Наука, 1986.
- [2] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.
- [3] Боровский А.В., Галкин А.Л. Лазерная физика. М.: ИЗДАТ, 1996.
- [4] Чижонков Е.В. Численное моделирование аксиальных решений некоторых нелинейных задач // Вычислительные методы и программирование, 2010, т.11, вып. 3, с. 215-227.
- [5] Нигматулин Р.И. Название: Динамика многофазных сред. Издательство: М.: Наука, 1987

[6] Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Изд-во ОИГГМ СО РАН, 1994. 183 с.

[7] Турдиев У.К., Имомназаров Х.Х. Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде // Тезисы Межд. конф. «Обратные и некорректные задачи» 2-4 октября 2019 г. Самарканд, Узбекистан, с. 119-120.

[8] Эркинова Д.А., Имомназаров Б.Х., Имомназаров Х.Х. Одномерная система уравнений типа Хопфа // Региональная научно-практ. конф. «ТОГУ-Старт: фундаментальные и прикладные исследования молодых», 12-16 апреля 2021 г., Хабаровск, с. 61-69.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ТИПА СТОКСА

¹*Имомназаров Ш.Х.,* ²*Худайназаров Б.Б.*

¹*Институт геологии и минералогии Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия,*

²*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
e-mail: imom@omzg.sccc.ru, behzodxudaynazarov@gmail.com*

Изучение течений вязких сжимаемых / несжимаемых жидкостей на основе решения полной системы уравнений двухскоростной гидродинамики представляется актуальным. В литературе известно очень ограниченное число случаев, допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье-Стокса [1-3]. Задача настоящей работы состоит в построении фундаментальных решений для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении обусловленными коэффициентами вязкости фаз и коэффициентом межкомпонентного трения. Эти решения могут быть полезными для тестирования численных методов решения уравнений двухскоростной гидродинамики.

В данном докладе построено фундаментальное решение для описания трехмерных стационарных течений вязких жидкостей двухскоростного континуума с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, & \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} &= 0, \\ \nu \Delta \mathbf{v} &= \nabla p + b\varepsilon(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) - \rho \mathbf{f}, \\ \tilde{\nu} \Delta \tilde{\mathbf{v}} &= \nabla p - b(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) - \rho \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ --- векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ и $\tilde{\rho}$, ν и $\tilde{\nu}$ -- соответствующие объемные вязкости, b -- аналог коэффициента Дарси, $\bar{\rho} = \rho + \tilde{\rho}$ -- общая плотность двухскоростного континуума, p --- давление, $\mathbf{f}$ - вектор массовой силы, отнесенной к единице массы.

Данная система является переопределенной системой уравнений в частных производных. Изучению краевых задач для таких переопределенных систем уравнений в частных производных посвящены работы [4-6].

Компоненты матриц $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $i, j = 1, 2, 3$ и вектора $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ фундаментального решения системы (1) находятся из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_s} &= 0, & \frac{\partial \tilde{G}_{sj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_s} &= 0, \\ \nu \Delta G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i} - b\varepsilon(G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{v}) &= \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \tilde{\nu} \Delta \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x_i} + b(G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tilde{G}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{v}) &= \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, δ_{ij} -- символ Кронекера, $\delta(\mathbf{r})$ -- δ - функция Дирака.

По повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 3.

Список используемых источников

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука. 1978. - 736 с.
- [2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. - 712 с.
- [3] Drazin P., Riley N. The Navier-Stokes equations. A classification of flows and exact solutions. Cambridge Univ. Press: Cambridge, 2006
- [4] Гудович И.С., Крейн С.Г. О некоторых краевых задачах, эллиптических в подпространстве // Матем. сб., 1971, Т. 84(126), No. 4, С. 595-606.
- [5] Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // СибЖВМ, 2017, т. 20, No. 4, с. 425-437.
- [6] Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Урев М.В., Бахрамов Р.Х. Решение одной переопределенной стационарной системы типа Стокса в полупространстве // СибЖИМ, 2021. т. 24, No. С. 54-63.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

^{1,2}Иргашев Б.Ю., ³Пулатова С.И.

¹Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан

²Институт Математики им. В.И.Романовского АН РУз,

³Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан.

e-mail: bahromirgasev@gmail.com

В области $D = D_x \times D_y$, $D_x = \{x: 0 < x < 1\}$, $D_y = \{y: 0 < y < 1\}$

рассмотрим уравнение

$${}_CD_{0x}^\alpha u(x, y) - y^m \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad 1 < \alpha < 2, \quad 0 \leq m < 1, \quad (1)$$

где ${}_CD_{0x}^\alpha$ – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто

$${}_CD_{0x}^\alpha u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{\partial^2 u(\tau, y)}{\partial \tau^2} (x-\tau)^{\alpha-1} d\tau.$$

Задача А. Найти решение уравнения (1) из класса

$$u_{yy}, {}_CD_{0x}^\alpha u(x, y) \in C(D_x \times D_y), u(x, y), u_y(x, y) \in C(\overline{D}),$$

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| dx < \infty,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} u(x, y) = \varphi(y), \lim_{x \rightarrow +0} u_y(x, y) = \psi(y), \quad (3)$$

здесь $\varphi(x), \psi(x)$ достаточно гладкие функции и для них выполняются естественные условия согласования.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных физических процессов и явлений [1-3]. Решение ищем в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Учитывая условия (2), относительно функции $Y(y)$, получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} Y''(y) = -\lambda y^{-m} Y(y), \\ Y(0) = Y(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Эквивалентное к задаче (4) интегральное уравнение имеет вид

$$Y(y) = -\lambda \int_0^1 \xi^{-m} G(y, \xi) Y(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где

$$G(y, \xi) = - \begin{cases} (1-\xi)y, 0 \leq y \leq \xi, \\ (1-y)\xi, \xi \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Запишем (5) в виде

$$y^{-\frac{m}{2}} Y(y) = -\lambda \int_0^1 \xi^{-\frac{m}{2}} G(y, \xi) y^{-\frac{m}{2}} \left(\xi^{-\frac{m}{2}} Y(\xi) \right) d\xi,$$

введем обозначения

$$\overline{Y}(y) = y^{-\frac{m}{2}} Y(y), \quad \overline{G}(y, \xi) = -\xi^{-\frac{m}{2}} G(y, \xi) y^{-\frac{m}{2}},$$

тогда имеем

$$\bar{Y}(y) = \lambda \int_0^1 \bar{G}(y, \xi) \bar{Y}(\xi) d\xi. \quad (6)$$

(6)- есть интегральное уравнение с непрерывным, по обоим переменным, и симметричным ядром. По теории уравнений с симметричными ядрами уравнение (6) имеет не более чем счетное число собственных функций. Итак, задача (4) имеет собственные значения $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, а соответствующие собственные функции $-Y_n(y)$. Теперь учитывая условия (3), относительно функции $X(x)$ получим следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} {}_C D_{0x}^\alpha X_n(x) = -\lambda_n X_n(x), 1 < \alpha < 2, \\ \lim_{x \rightarrow +0} X_n(x) = \varphi_n, \lim_{x \rightarrow +0} X_n'(x) = \psi_n, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi(y) y^{-m} Y_n(y) dy, \psi_n = \int_0^1 \psi(y) y^{-m} Y_n(y) dy.$$

Решение задачи (7) имеет вид (см. [4])

$$X_n(x) = \varphi_n E_{\beta,1}(-\lambda_n x^\alpha) + \psi_n x E_{\beta,2}(-\lambda_n x^\alpha),$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha \geq 0$$

-функция Миттаг-Леффлера.

Для решения задачи (7) справедлива оценка

$$|X_n(x)| \leq M (|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad 0 < M = \text{const}.$$

Итак, формальное решение поставленной задачи А имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (8)$$

Теорема. Пусть функции $\varphi(y), \psi(y)$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi(y), \psi(y) \in C^2[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0,$$

тогда решение задачи А существует в виде ряда (8).

Единственность решения поставленной задачи показывается спектральным методом.

Литература

- [1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [2] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
- [3] Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Nonlinear Dynam. 2002. vol 29-1. no. 4. С. 145–155.

[4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier, Amsterdam (2006).

ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Ишанкулов Т., Маннонов М. А.

Самаркандский государственный университет, г. Самарканд
(Узбекистан),

e-mail: tolibi@mail.ru, maxmudjon_mannonov@mail.ru.

1. Постановка задача

Функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

называется полианалитической порядка n (или кратко n – аналитической) в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, если она в D имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно и удовлетворяет обобщенному условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Совокупность n – аналитических в область D функций обозначим $\Pi_n(D)$. Пусть D – ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Требуется определить n – аналитическую функцию $w(z)$ в области D по значениям ее последовательных производных $\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k} (k = 0, 1, \dots, n-1)$, на части границы $S (S \subset \partial D)$ этой области:

$$\frac{\partial^k w}{\partial \bar{z}^k} = f_k(z) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad z \in S \quad \left(\frac{\partial^0 w}{\partial \bar{z}^0} = w \right). \quad (2)$$

Через M обозначим множество функций $w(z) \in \Pi_n(D) \cap C^{n-1}(\bar{D})$, удовлетворяющих при $z \in D$ неравенствам

$$\left| \frac{\partial^k w(z)}{\partial \bar{z}^k} \right| \leq C, \quad z \in D \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3)$$

где C – постоянное число, не зависящее от функции $w(z)$.

Теорема 1: Пусть $w(z) \in M$ и

$$\left| \frac{\partial^k w(z)}{\partial \bar{z}^k} \right| \leq \varepsilon, \quad z \in S \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

Тогда, при $z \in D$ имеет место неравенство

$$|w(z)| \leq \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} \frac{d^l}{k!(l-k)!} \right] \varepsilon^{\omega(z)} C^{1-\omega(z)}, \quad (5)$$

где $d = \max_{z \in \bar{D}} |z|$, $\omega(z)$ – гармоническая мера множества S относительно области D .

В случае $n=1$, решение задачи (1), (2) для аналитических функций можно задавать формулой Карлемана ([1, стр. 60-61]; [2, стр. 18-19]). Для n – аналитических функций когда часть границы области является отрезком действительной оси (область типа шапочки) формула Карлемана доказана в [3]. Приводим аналог формулы Карлемана для n – аналитических функций в случае когда область регулярности есть единичный круг $D_1 = \{z : |z| < 1\}$, S – дуга (t', t'') окружности $\partial D_1, (t' = e^{i\theta'}, t'' = e^{i\theta''}, 0 < \theta' < \theta'' < 2\pi)$. Рассмотрим гармоническую меру ω дуги S относительно круга D_1 [1]:

$$\omega_1(z, \theta', \theta'') = \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{z - e^{i\theta''}}{z - e^{i\theta'}} e^{\frac{\theta' - \theta''}{2} i} \right).$$

Рассмотрим функцию Карлемана дуги S относительно круга D_1 [1]:

$$\Phi_\sigma(t, z) = \frac{1}{t - z} \exp \{ \sigma [\lambda(t) - \lambda(z)] \},$$

где $\lambda(z) \in A(D_1)$ аналитическая функция в области D_1 такая что $\omega(z) = \operatorname{Re} \lambda(z)$, $\sigma > 0$ положительный числовой параметр.

Теорема 2. Для функции $w \in \Pi_n(D_1) \cap C^{n-1}(\bar{D}_1)$ при $z \in D_1$ справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения

$$\begin{aligned} w(z) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \frac{(\bar{z} - \bar{t})^k}{k!} \Phi_\sigma(t, z) w_{\bar{t}^k}(t) dt \\ w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \frac{(\bar{z} - \bar{t})^k}{k! (t - z)} w_{\bar{t}^k}(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\sigma \sum_{k=0}^{n-1} \int_S \frac{(\bar{z} - \bar{t})^k}{k!} w_{\bar{t}^k}(t) e^{\sigma [\lambda(t) - \lambda(z)]} \frac{\lambda(t) - \lambda(z)}{(t - z)} dt. \end{aligned}$$

Литература

[1] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, **1980**.

[2] Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, **1990**.

[3] Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. Продолжение полианалитических функций. Известия вузов. Математика. 8, 37-45 (**2021**)

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНОГО ПО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА- ЛИУВИЛЛЯ

Камалова С. Д.

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан
e-mail: ksevara-1992@bk.ru

В данной работе в области $Q = (0, l) \times (0, T)$, где l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее уравнение

$$D_{0t}^{\alpha} u(y, t) = a^2 \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y^2} + f(y, t), \quad (y, t) \in Q, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i} u(y, t) \Big|_{t=0} = \varphi_i(y), \quad i = \overline{1, -[-\alpha]}, \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (3)$$

Здесь $(y, t) \in Q$, число $a > 0$ фиксировано, а $f(y, t)$ и $\varphi_i(y)$, $i = \overline{1, -[-\alpha]}$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y), n \in \mathbb{N}\}$ следующей спектральной задачи:

$$v''(y) + \lambda v(y) = 0, \quad (4)$$

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (5)$$

λ – спектральный параметр.

Оператор D_{st}^{α} интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке $s \in \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$D_{st}^{\alpha} u(y, t) = \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{u(y, \tau) d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}}, \text{ если } \alpha < 0; \quad D_{st}^{\alpha} u(y, t) = u(y, t), \text{ если } \alpha = 0;$$

$$D_{st}^{\alpha} u(y, t) = \text{sign}^p(t-s) \frac{d^p}{dt^p} D_{st}^{\alpha-p} u(y, t) = \frac{\text{sign}^{p+1}(t-s)}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int_s^t \frac{u(y, \tau) d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}$$

если $p-1 < \alpha \leq p$, $p \in \mathbb{N}$.

Введем пространство $L_2(0, l)$ с нормой

$$\|f\|_{L_2(0, l)}^2 = \int_0^l |f(x)|^2 dx.$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(v) = -v''(x)$ в пространстве $L_2(0, l)$, функций $v(x)$ удовлетворяющих граничным условиям (5). Такое пространство обозначим через $\overset{\circ}{L}_2(0, l)$.

Теорема. Пусть начальные функции $\varphi_i(y)$, $i = \overline{1, -[-\alpha]}$ и правая часть $f(y, t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{[-\alpha]} \varphi_{j;n} t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda_n (t-\tau)^{\alpha}] f_n(\tau) d\tau \right|^2 < \infty$$

при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1), (2), (3) из класса $\dot{L}_2^{\theta}(Q)$ с показателем $\theta = -[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{[-\alpha]} \varphi_{j;n} t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(\lambda_n t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda_n (t-\tau)^{\alpha}] f_n(\tau) d\tau \right] \cdot v_n(y)$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$f_n(t) = \int_0^l f(y, t) v_n(y) dy, \quad \varphi_{j;n} = \int_0^l \varphi_j(y) v_n(y) dy,$$

$$E_{\alpha, \alpha-j+1}(\lambda_n \cdot t^{\alpha}) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t^{\alpha})^q}{\Gamma(\alpha q + \alpha - j + 1)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во. МГУ, 1999. – 798 с.
- [2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Изд-во. Наукатехника, 1987. – 688 с.
- [3] Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II// Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529-539.
- [4] Джрбабян М.М., Нерсисян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН Армянской ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3-29.
- [5] Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 8-19. ISSN 2079-6641.
- [6] Ashurov R. and Muhiddinova O. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // arXiv:2006.08439v1 [math.GM] 6 Jun 2020. С. 1-8.

НАЧАЛЬНО–ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С., Кошанов А.П.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: shokiraka@mail.ru, allanazarkoshanov@mail.ru

Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2]. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [3]. В данной работе в области $Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a^2 \Delta^2 u(x, t) - b^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta u(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_j u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} + \beta_j u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \alpha_j \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} + \beta_j \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=\pi} &= 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} &= u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=0} &= \frac{\partial^3 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^3} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \end{aligned}$$

$$u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N,$$

$$u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j^2} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \quad (3)$$

где $1 \leq p \leq q \leq N$, $(x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in Q$, число $a_i > 0$, $b_i > 0$, $c_i > 0$, $i = \overline{1, N}$ и $\alpha_j = \text{const}$, $\beta_j = \text{const}$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$, $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ фиксировано, а $f(x, t)$ и $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p \times (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p} \times (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}}$ следующей спектральной задачи:

$$\Delta v(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=0} + \beta_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=\pi} = 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \quad 1 \leq j \leq p, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=0} = v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} = \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi}, \quad p+1 \leq j \leq q, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)|_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq p \leq q \leq N. \end{array} \right. \quad (5)$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ действительные числа при

каждом $1 \leq j \leq p$ и $\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \left(\sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1\right)^2 \cdot \sigma(s_j)} \right) < 1$, где

$$\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sigma(s_j) = 1 \quad \text{при} \quad s_j > 0, \quad \theta_j = \sqrt{2} \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|, \quad \lambda_{m_j} = 2m_j + \varepsilon_{m_j} \cdot \varphi_j,$$

$$\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \quad \varepsilon_{m_j} = \varepsilon_{-m_j} = \pm 1 \quad \text{при} \quad m_j \in \mathbb{Z}. \quad \text{Тогда регулярные}$$

решение задачи (1) – (3) из класса $W_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_i > 4 + \frac{N}{2}$,

$i = \overline{1, N}$, $\theta > 2 + \frac{N}{2}$ существует и единственно представляется в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_{q+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\varphi_{m_1, \dots, m_N} \cos \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} t + \frac{\psi_{m_1, \dots, m_N}}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}}} \sin \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} t + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} (1 + b^2 \lambda_{m_1, \dots, m_N})} \int_0^t f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) \sin \sqrt{\mu_{m_1, \dots, m_N}} (t - \tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N),$$

где система собственных функций имеет вид

$$\left\{ v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p \times (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p} \times (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}} = \\ = \left\{ \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta_j \cos \lambda_{m_j} x + \varepsilon_{m_j} \cdot \operatorname{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1 + |\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |2m_j|^{2s_j}}} \cdot e^{i2m_j x_j} \right\}_{(m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |m_j|^{2s_j}}} \cdot \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во. МГУ, 1999. –798 с.
[2] Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. –355 с.
[3] Klebsch A. Theorie der Elasticital faster Körper. Leipzig, 1862.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО–ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ МИЛЛЕРА–РОССА, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРОЙ ЗАДЕЛАН, А ДРУГОЙ – СВОБОДНОЙ, В КЛАССАХ СОБОЛЕВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

¹Касимов Ш.Г., ²Реймбаева Д.К.

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

²Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан
e-mail: shokiraka@mail.ru, Dilya201127@mail.ru

Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с.141–143]. К уравнению колебаний балки приходит также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2; 3, с. 216]. В данной работе в области

$Q = \Pi \times (0, T)$, где $\Pi = (0, l) \times \dots \times (0, l)$, а l, T – заданные положительные числа, рассматривается следующее более общее уравнение

$$D_j^\alpha u(x, t) + a^2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial^{4m} u(x, t)}{\partial x_j^{4m}} = f(x, t), (x, t) \in Q, n-1 \leq \alpha < n, j = \overline{0, n-1}, m, n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$D_{j-i-1}^{\alpha-i-1} u(x, t) \Big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i(x), i = 0, 1, \dots, j-1; \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial t^s} \Big|_{t=0} = \varphi_s(x), s = 0, 1, \dots, n-j-1$$

(2)

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4k} u(y, t)}{\partial y_j^{4k}} \Big|_{y_j=0} = 0, \frac{\partial^{4k+1} u(y, t)}{\partial y_j^{4k+1}} \Big|_{y_j=0} = 0, \\ \frac{\partial^{4k+2} u(y, t)}{\partial y_j^{4k+2}} \Big|_{y_j=l} = 0, \frac{\partial^{4k+3} u(y, t)}{\partial y_j^{4k+3}} \Big|_{y_j=l} = 0, k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $(x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in Q$, число $a > 0$ фиксировано, а $f(x, t)$ и $\tilde{\varphi}_i(x), i = 0, 1, \dots, j-1; \varphi_s(x), s = 0, 1, \dots, n-j-1$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(x), n \in \mathbb{N}^N\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial^{4m} v(x)}{\partial x_j^{4m}} - \lambda v(x) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4k} v(x)}{\partial x_j^{4k}} \Big|_{y_j=0} = 0, \frac{\partial^{4k+1} v(x)}{\partial x_j^{4k+1}} \Big|_{y_j=0} = 0, \\ \frac{\partial^{4k+2} v(x)}{\partial x_j^{4k+2}} \Big|_{y_j=l} = 0, \frac{\partial^{4k+3} v(x)}{\partial x_j^{4k+3}} \Big|_{y_j=l} = 0, k = \overline{0, m-1}, j = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (5)$$

λ – спектральный параметр, D_j^α – оператор интегро-дифференцирования в смысле секвенциальной производной Миллера–Росса по Римана–Лиувилля (см. [3],[4]).

В данной работе получена теорема единственности и существования решения задачи (1)–(3) в пространстве Соболева. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи (4), (5).

Собственные значения задачи (4), (5) определяются по формуле $\lambda_n = b_n^{4m}, n = 1, 2, \dots$, где b_n – корень уравнения $ch(lb) \cdot \cos(lb) = -1$, а собственные функции – по формуле

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+b_n^{4s}}} \times \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l} \left| \operatorname{ctg} \frac{b_n l}{2} \right|} \left(\frac{\cos b_n \left(x - \frac{l}{2} \right)}{\sin \frac{b_n l}{2}} - \frac{\operatorname{sh} b_n \left(x - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{b_n l}{2}} \right), & n = 2i, i = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{\sqrt{l} \left| \operatorname{tg} \frac{b_n l}{2} \right|} \left(\frac{\sin b_n \left(x - \frac{l}{2} \right)}{\cos \frac{b_n l}{2}} + \frac{\operatorname{ch} b_n \left(x - \frac{l}{2} \right)}{\operatorname{sh} \frac{b_n l}{2}} \right), & n = 2i - 1, i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть начальные функции $\tilde{\varphi}_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, j-1$; $\varphi_s(x)$, $s = 0, 1, \dots, n-j-1$ и правая часть $f(x, t)$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n-j-1} (\varphi_s)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{j-1} (\tilde{\varphi}_k)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^{\alpha-k-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; \alpha-k) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}; \alpha) f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right]^2 \prod_{k=1}^N (1+b_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned}$$

при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1), (2), (3) из класса

$W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}$ (Q) с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N > 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ существует,

единственно и представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n-j-1} (\varphi_s)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^s \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; s+1) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=0}^{j-1} (\tilde{\varphi}_k)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^{\alpha-k-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^\alpha; \alpha-k) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \cdot E_{\frac{1}{\alpha}}(\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-1}; \alpha) f_{m_1, \dots, m_N}(\tau) d\tau \right] \cdot v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во. МГУ, 1999. –798 с.
- [2] Коренев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. –355 с.
- [3] Крылов А.Н. Вибрация судов. М.: Наука, 2012. –216 с.

[4] Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional defferential equations. New York: wiley and Sons, 1993. –384 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПРЕТОРОМ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Меражова Ш. Б.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

e-mail: shsharipova@mail.ru

В сегодняшний день изучения обратных задач считается актуальным, потому что такие задачи имеют свою практическое применения.

В работе [1] исследуется задача для интегро дифференциального уравнения параболического типа в одномерном случае, в [2] даётся поставновка обратной задачи в двумерном случае. В данной работе приводится постановка обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа с дифференциальном опретором в общем виде.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$u_t - Lu = \int_0^t K(x', \tau) u(x, t - \tau) d\tau, (x, t) \in R_T^n, \quad (1)$$

здесь, L – дифференциальный оператор, имеет следующий вид:

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t).$$

Для этого уравнения можно поставить следующую обратную задачу:

Обратная задача. Пусть требуется определить пару функций $u(x, t)$ решение задачи и $K(x', t)$ ядра из уравнения (1) удовлетворяющее следующее условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u(x', 0, t) = g(x', t); \quad x' \in R^{n-1}, 0 \leq t \leq T \quad g(x', 0) = \varphi(x', 0) \quad (3)$$

где $R_T^n = \{(x, t) | x = (x', x_n) \in R^T, 0 < t < T, T > 0\}$

Эта обратная задача для параболического интегро-дифференциального уравнения с интегральным членом типа свертки, где дифференциальный оператор в общем виде.

Обратная задача исследуется при помощи вспомогательной задачи, в которой в дополнительном условии содержится искомая функция.

Литература

[1] D.K.Durdiev, A.Sh.Rashidov, Inverse problem of determining the kernel in an integrodifferential equation of parabolic type, Differ. Equ., 50(2014), no. 1, 110–116. DOI: 10.1134/S0012266114010145.

[2] Меражова Ш.Б. Обратная задача определения ядра для одного модельного интегро-дифференциального уравнения параболического типа. Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования:

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Муминов Ф. М., Каримов С. Я., Муминов С. Ф.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета, Узбекистан

e-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru, mr_man89@mail.ru

В этой статье приводится постановка нелокальных задач для уравнения смешанного типа. При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается корректность этих задач.

Пусть D_- квадрат $0 < -y, x < 1$, а D_+ -односвязная область при $y \geq 0$, ограниченная простой дугой G с концами в точках $(0,0)$, $(1,0)$ и интервалом $J = (0,1)$ оси X . Обозначим через j множества всех точек, лежащих на диагональ D_- , а на ∂D_- отметим точки $a(x,1)$, $b(0, x-1)$, $c(1-x, 0)$, $d(1, -x)$, $e(x, 0)$, $f(1, x-1)$, $g(-1, x-1)$, $h(0, -x)$.

Задача. Определить в $D_+ \cup D_-$ решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0 \quad (1)$$

Классе

$$C(\overline{D_+}) \cup C(\overline{D_-}) \cap C'(\overline{D_+} \cup J) \cap C'(\overline{D_-} \cup J \setminus j)$$

$C^2(D_+) \cap C^2(D_- \setminus j)$ удовлетворяющее условиям

$$u|_G = \varphi(t), \quad t \in G \quad (2)$$

$$a_j(x)u(a) + \dots + h_j(x)u(h) = \psi_j(x) \quad (3)$$

$$x \in [0, 1], \quad j = 1, 2, 3$$

$$u(x, -0) = \alpha(x)u(x, +0) + j_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

где ${}_+0(-0)$ означает предел при $y \rightarrow 0$ из $D_+(D_-)$. В окрестностях концов J производные u_x , u_y могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Предполагается, что $\alpha, j_0, a_i, \dots, h_j, \psi_i \in C_\mu^2[0, 1]$, $(j = 1, 2, 3)$, $\varphi \in C_\mu(\overline{G})$, $j_i \in C_\mu^1[0, 1]$, $\beta = \operatorname{const} \neq 0$. Под C_μ^k понимается пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций с гильбертовой k -ой производной.

Литература

[1] Нахушев А.М. Дифференциал уравнения, 1970 т.6, 1с 190-191 критерий единственности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа цилиндрической области.

[2] Соболев С.И. Пример корректности кривой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе Докл. А.К. СССР. 1956. Т109№4 с 707-709

[3] Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа. Труды математического института АН СССР. 1953 Т4 с 3-57

[4] Врагов В.К. К вопросу о постановка корректных краевых задач для неклассических уравнений математической физике. Новосибирск, 1981 с 24-31

[5] Ф.М.Муминов “Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа” Ташкент 2022.

[6] Муминов, Ф. М., Каримов, С.Я., Утабов, У. А. (2022). Нелокальная задача для уравнения смешанного типа. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(11), 576-581.a

О КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

Палин В.В., Айбосинова Г.М.

*Московский Государственный Университет, Москва, Россия
Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
e-mail: gulmira.aybosinova@mail.ru*

В работе рассматривается семейство зависящих от параметра λ задач Коши:

$$\begin{cases} u_t + (\lambda \sin(u) - \theta(x))_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для того, чтобы выяснить вопрос о существовании допустимого кусочно-гладкого обобщенного решения задачи (1), мы исследуем вопрос о существовании кусочно-постоянных обобщенных решений этой задачи. Такой подход связан с тем, что справедлива следующая теорема:

Теорема 1 *Рассмотрим задачу Коши*

$$\begin{cases} u_t + (\Phi(u) - \theta(x))_x = 0, \\ u_{t=0} = u_L + (u_R - u_L)\theta(x), \end{cases} \quad (2)$$

где u_L, u_R – заданные константы. Тогда если существует кусочно-гладкое допустимое решение (2), то существует и кусочно-постоянное решение этой задачи.

Таким образом, для выяснения вопроса о существовании кусочно-гладкого допустимого решения задачи (1) достаточно выяснить существует ли ее обобщенное решение вида

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^n a_k \theta(x - \omega_k t). \quad (3)$$

справедлива следующая теорема:

Теорема 2 1. При $|\lambda| > 1$ существует кусочно-постоянное решение задачи Коши (1) вида (3), содержащее два слагаемых, т.е. соответствующее $n = 2$.

2. При $|\lambda| < 1$ кусочно-постоянных решений задачи (1) вида (3), соответствующих $n = 2$ не существует.

3. При $|\lambda| \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ существует кусочно-постоянное решение задачи (1) вида (3), соответствующее $n = 3$.

4. При $|\lambda| < \frac{1}{2}$ кусочно-постоянных решений задачи (1) вида (3) не существует ни при каком $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, задача Коши для нелинейного уравнения (1) не имеет кусочно-гладких допустимых решений при $\lambda < \frac{1}{2}$. Отметим, что задача (1) получается как следствие из задачи Коши для системы законов сохранения

$$\begin{cases} v_t = 0, & v|_{t=0} = -\theta(x), \\ u_t + (\lambda \sin u + v)_x = 0, & u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

При этом, если переписать систему законов сохранения, соответствующую задаче (4), в недивергентном виде

$$U_t + A(U)U_x = 0,$$

то матрица

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \lambda \cos u \end{pmatrix}$$

имеет всегда вещественные собственные значения, а значит, система (4) – нестрого гиперболическая по Петровскому. Отметим, что она не является

нестрого гиперболической по Фридрихсу, так как при $u = \frac{\pi}{2}$ матрица $A(U)$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и является жордановой клеткой,

Таким образом, показано, что задача Римана для нестрого гиперболических по Петровскому систем законов сохранения может не иметь кусочно-гладких допустимых решений.

Литература.

[1] Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А., Уравнения с частными производными первого порядка. Москва 1999г

[2] Witham G.B. Linear and Nonlinear waves. Pasadena, Colifornia December 1973

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Расулов Х. Р.

*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан
Бухарское отделение Института математики, Бухара, Узбекистан
e-mail: xrasulov71@mail.ru*

Одной из основных задач при исследовании динамической системы является изучение эволюции состояния системы. Для изучения эволюции используются квадратичные стохастические операторы. В этой связи квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений.

Известно, что рассмотрение эволюции требует привлечения времени. В зависимости от задачи может рассматриваться или непрерывное время (когда интересуют состояния системы в каждый момент), или дискретное (когда интересуют состояния системы в отдельные изолированные моменты времени). Поведение системы зависит от параметров, точные значения которых часто неизвестны. Решить задачу численно для всех возможных значений параметров принципиально невозможно. Поэтому наиболее полезная сторона качественной теории динамических систем, то есть динамических систем с непрерывным временем, состоит в том, что многие важные свойства решений можно предсказать заранее, не имея решений уравнений в явном виде.

Квадратичные динамические системы с дискретным временем изучены довольно глубоко (например, см. [1-4]), но непрерывным временем изучены сравнительно мало. Отметим работы [5-6]. Например, остаются неизученными непрерывные аналоги строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе, рассмотренных в [4].

В настоящей работе мы изучаем непрерывный аналог одного квадратичного стохастического оператора из [4], которое, в нашем случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = cx_3^2 + 2x_2x_3 - x_1, \\ \dot{x}_2 = dx_3^2 + 2x_1x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 = (x_1+x_2)^2 - x_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ есть состояние некоторой (биологической) системы в момент (непрерывной) времени $t \geq 0$, $c + d = 1$.

Отметим, что каждый оператор является интересным примером в теории многомерных, нелинейных динамических систем, с разнообразным поведением траекторий.

В данном сообщении установлена тип неподвижной точки и найдена численное решение системы, а также дан сравнительный анализ результатов полученных в [4]. Так, сравнительный анализ результатов полученных в [4] и в настоящей статье, показывает что, положения равновесия системы (1)

совпадают с неподвижной точкой оператора, введенной в [4] и найденная траектория стремится к положению равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ganikhodzhaev R.N., Mukhamedov F.M., Rozikov U.A. Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Fields. 2011. V.14, No.2, p.279-335.
- [2] Lyubich Yu.I. Mathematical Structures in Populatsion Genetics, Biomathematiks, 22, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] Розиков У.А., Жамилов У.У., «F-квадратичные стохастические операторы», Матем. заметки, 83:4 (2008), 606–612.
- [4] Жамилов У.У., Розиков У.А., «О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе», Матем. сб., 2009, том 200, номер 9, 81–94.
- [5] Rasulov Kh.R., «On a continuous time F - quadratic dynamical system». Uzbek Mathematical Journal, 2018, №4, p.126-130.
- [6] Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // Communications in Mathematics, 30 (2022), no. 1, pp. 239-250.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ

Рашидов С.Г.

Институт математики, Ташкент, Узбекистан

e-mail: sardorrashidov1995@mail.ru

В этом докладе рассматривается вырождающийся параболическое уравнение

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + \frac{1}{x} u_x(x, t) - \frac{\nu^2}{x^2} u(x, t), \nu = \text{const}, \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$.

Задача Коши. Требуется найти в области Ω решение уравнение (1) удовлетворяющий начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

причем $u(+\infty, t) = u_x(+\infty, t) = 0$.

Доказано, что решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2 + \xi^2}{4t}} I_\nu\left(\frac{x\xi}{2t}\right) \varphi(\xi) \xi d\xi, \quad (3)$$

где $I_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(k!) \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}$ - функция Бесселя мнимого аргумента [5].

Литература

- [1] A. Hasanov, A. S. Berdyshev and A. R. Ryskan. *Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation*. Complex variables and elliptic equations. 65 (4), 2020, pp. 632-647.
- [2] A. Hasanov and E.T. Karimov, *Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients*. Applications Mathematical Letters, 22, 2009, pp. 1828-1832.
- [3] A. Hasanov, *Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration*. International Journal of Applied Mathematics and Statistics. 13 (8), 2008, p. 41-49.
- [4] A. Hasanov, *Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation*. Complex Variables and Elliptic Equations. Vol. 52, No. 8, 2007, pp. 673–683.
- [5] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

¹Рузиев М.Х., ²Адхамова Д.Т.

¹Институт Математики Академии Наук РУз, Ташкент, Узбекистан

²Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

e-mail: mrusiev@mail.ru, Dilafruzadxamova@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^- \cup I$, где D^+ - первый квадрант плоскости, D^- - конечная область четвертого квадранта плоскости, ограниченная характеристиками OC и BC уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком OB прямой $y=0$, $I = \{(x,y): 0 < x < 1, y=0\}$. В уравнении (1) m, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$. Введем обозначения $I_0 = \{(x,y): 0 < y < \infty, x=0\}$, $I_1 = \{(x,y): 1 < x < \infty, y=0\}$.

Задача. Найти функцию $u = u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cup C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;

2) $\lim_{R \rightarrow \infty} u(x,y) = 0$, $R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2}$, $x > 0$, $y > 0$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi(y), \quad y \geq 0, \\ u(x, 0) &= \tau_1(x), \quad x \in \bar{I}_1, \\ u(x, y)|_{OC} &= \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in I,$$

причем эти пределы при $x=0$, $x=1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-2\beta$, где $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$, $\psi(x) \in C[0, 1/2] \cap C^{1,\delta_1}(0, 1/2)$, $\psi(0)=0$, $\tau_1(x) \in C(\bar{I}_1)$

, причем функция $\tau_1 = \tau_1(x)$ в окрестности точки $x=1$ представима в виде $\tau_1(x) = (1-x)\tilde{\tau}_1(x)$, $\tilde{\tau}_1(x) \in C(\bar{I}_1)$, $\tau_1(x) \in L(I_1)$ и при всех достаточно больших значениях x удовлетворяет неравенству $|\tau_1(x)| \leq M/x^\delta$, где M, δ - положительные постоянные числа, $\varphi(y) \in C[0, \infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi(y) \in L(0, \infty)$, $\varphi(\infty)=0$, $\varphi(0)=0$.

С помощью принципа экстремума доказана следующая

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\varphi(y) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $\tau_1(x) \equiv 0$. Тогда задача имеет лишь тривиальное решение.

Методом интегральных уравнений доказана теорема существования решения задачи.

Отметим что, локальная краевая задача для уравнения (1) в случае $\beta_0=0$ изучена в работе [1], а нелокальная задача в случае $m=0$ исследована в [2].

Литература

[1] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. Высшая школа. 1985, 304 с.

[2] Рузиев М.Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области. Известия вузов. Математика. 2010, № 11, с. 41-49

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ α –ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

¹Сатторов Э.Н., ²Рустамов С.У.

¹Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан

²Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru, Sohibjon_17@mail.ru

Пусть R^3 -вещественное трехмерное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_1, x_2, 0), \quad y' = (y_1, y_2, 0) \in R^2,$$

$$s = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad r^2 = |y - x| = s + (y_3 - x_3)^2,$$

Ω -ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Рассмотрим систему уравнений [1]

$$\alpha_0 f_0 - \operatorname{div} f - \langle f, \vec{\alpha} \rangle = 0, \quad \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} f + [f \times \vec{\alpha}] + f_0 \vec{\alpha} + \alpha_0 f = 0 \quad (1)$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_k \in C$, $k = 0, 1, 2, 3$; $f = (f_1, f_2, f_3)$, f_0 - векторная и скалярная функции соответственно.

Пусть Q -множество комплексных кватернионов, т.е. если $\alpha \in Q$, то $\alpha = \sum_{k=0}^3 \alpha_k i_k$, где i_k , $k = 0, 1, 2, 3$ - базисные кватернионные векторы, $\alpha_k \in C$, $k = 0, 1, 2, 3$. По определению, для i -мнимой единицы из C - выполняются соотношения $ii_k = i_k i$, $k = 0, 1, 2, 3$. Обозначим $\hat{\alpha} := \sum_{k=1}^3 \alpha_k i_k$, $\bar{\alpha} := \alpha_0 - \hat{\alpha}$, через $\mathfrak{A}$ подмножество Q делителей нуля. Через Θ обозначим подмножество Q делителей нуля.

На кватернионнозначных функциях вида $F(x) = \sum_{k=0}^3 f_k(x) i_k$, $x \in \Omega \subset R^3$, $f_k(x) \in C^1(\Omega)$, $k = 0, 1, 2, 3$ определим оператор $D_\alpha F := (D + M^\alpha)F$, где $D := \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ - оператор, обобщающий двумерный оператор Коши-Римана (см. например [2]); $M^\alpha F := F\alpha$. Тогда уравнение $D_\alpha F = 0$ является эквивалентной записью системы (1).

Когда $\alpha := (\alpha_0, \vec{\alpha}) = 0$ система (1) является хорошо известной [3] системой Моисила-Теодореску, для которой в [4], [5] получена формула аналитического продолжения голоморфного вектора по ее значениям на куске границы и аналог теоремы Фока-Куни. При $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k \in R$, $k = 1, 2, 3$ задача аналитического продолжения обобщенно голоморфного вектора изучена в работе [6]. В настоящей заметке приводим аналогичную формулу для оператора D_α .

Когда $\alpha \in C$, т.е. $\alpha \equiv \alpha_0$, фундаментальное решение G_α оператора D_α может быть найдено по формуле (ср. [2] с. 76)

$$G_\alpha(x) = -[D_{-\alpha} h_\alpha](x) = h_\alpha(\alpha - x|x|^{-2} + i\alpha x|x|^{-1}), \quad (2)$$

где $h_\alpha(x) := -(4\pi|x|)^{-1} e^{-i\alpha|x|}$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + \alpha^2 I$ (см. например, [7]).

Обозначим $P^+F := (2\gamma)^{-1}F(\gamma + \hat{\alpha})$, $P^-F := (2\gamma)^{-1}F(\gamma - \hat{\alpha})$.

Тогда справедливо следующее непосредственно проверяемое равенство:

$$D_\alpha F = D_\xi P^+ F + D_\varsigma P^- F \quad (3)$$

где $\xi = \alpha_0 + \gamma$, $\varsigma = \alpha_0 - \gamma$, $\gamma \in C$, $\gamma^2 = \hat{\alpha}^2$.

Заметим, что операторы P^+ и P^- являются взаимно дополнительными проекторами, коммутирующими с операторами D_ξ и D_ς .

Определение 1.1. Функция

$$G_\alpha := \begin{cases} P^+ G_\xi + P^- G_\varsigma; & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [G_{\alpha_0}] \hat{\alpha}, & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha} = 0, \\ P^+ G_{2\alpha_0} + P^- G_0, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + h_0 \alpha, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

является фундаментальным решением оператора D_α .

Рассмотрим

$$K_\alpha := P^+ K_\xi + P^- K_\varsigma = -\frac{(\gamma + \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\xi} \Phi_\xi](x) - \frac{(\gamma - \hat{\alpha})}{2\gamma} [D_{-\varsigma} \Phi_\varsigma](x) \quad (5)$$

$$\Phi_\xi(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{K(i\sqrt{u^2 + s} + y_3)}{i\sqrt{u^2 + s} + y_3 - x_3} \right] \frac{ch(\gamma + \hat{\alpha})u}{\sqrt{u^2 + s}} du, \quad (6)$$

$$D_{-\xi} \Phi_\xi(x) = (D\Phi_\xi + \Phi_\xi \cdot \xi) = \sum_{k=1}^3 i_k \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_k} + \Phi_\xi \cdot \xi, \quad (7)$$

Теорема 1 (интегральная формула Коши). Пусть $f \in \ker D_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$, $\alpha \in Q$. Тогда

$$(K_\alpha F)(x) = F(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

где

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+ K_\xi F + P^- K_\varsigma F, & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ K_{\alpha_0} F + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} [K_{\alpha_0} F], & \alpha \notin \Re \text{ и } \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+ K_{2\alpha} F + P^- K_0 F, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 \neq 0, \\ K_0 F - V_0 F \alpha, & \alpha \in \Re \text{ и } \alpha_0 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$(K_\alpha F)(x) := - \int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y) n(y) F(y) dS_y, \quad x \in R^3 \setminus \partial\Omega, \quad (8)$$

$$(V_\mu F)(x) := \int_{\partial\Omega} h_\mu(x-y)n(y)F(y)dS_y, \quad \mu \in C, \quad x \in R^3, \quad (9)$$

$n(y)$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y .

Литература

- [1] Кравченко В.В., Шапиро М.В. Об обобщенной системе уравнений Коши-Римана с кватернионным параметром // ДРАН, 1993, т. 329, №5. С.
- [2] Klaus Gurlbeck, Wolfgang Sprobig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin : Birkhauser, 1990.
- [3] Оболашвили Е.И. Пространственный аналог обобщенных аналитических функций // Сообщения АН ГССР, 73, №1, 1974.
- [4] Ш.Ярмухамедов Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв.АН УзССР. – 1980. – №6. – серия физико-математических наук, С. 34-40.
- [5] T.Ishankulov Continuation of the solution to the Moisil-Teodoresco's system of equations // International conference ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS, August 5-9, 2002, Novosibirsk.
- [6] Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для обобщенной системы Моисил – Теодореско // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. - №8. – С. 1100 – 1110.
- [7] В.С.Владимиров Уравнения математической физики.М.:Наука, 1988. 512 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

¹Сафаров Ж.Ш., ²Жураева М.М.

¹Институт Математики имени В. И. Романовского АН РУз,

²Бухарский государственный университет

e-mail: ¹j.safarov65@mail.ru, ²m.jurayeva98@mail.ru

В области $D = \Omega \times (0, T)$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = \int_0^t h(\tau)u(x, y, t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

с начальными

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=l} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где, $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < l\}$, Δ – оператор Лапласа, $\psi(x, y)$ – заданная функция.

Нахождение функции $u(x, y, t) ((x, y, t) \in D)$, при известной $h(t)$ назовем прямой задачей.

Обратная задача заключается, в определении неизвестного коэффициента $h(t), t > 0$, по имеющиеся дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(x_0, y_0, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где (x_0, y_0) – фиксированная точка, принадлежащая в Ω , а $f(t)$ – заданная функция.

В работах [1] – [2] исследованы обратные задачи для параболических и гиперболических неоднородных интегродифференциальных уравнений. В работе [3], исследована задача (1) – (4) (прямая задача). Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи. В данной статьи будет идти речь о разрешимости обратной задачи. Основным результатом данной работы является следующая теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи (1) – (5).

Теорема. Пусть $\psi(x, y) \in C^4(\overline{\Omega})$, $h(t) \in C^3[0, T]$ и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} h'(0) &= \psi(x_0, y_0) \neq 0, \\ \psi(0, y) &= \psi_{xx}(0, y) = \psi(l, y) = \psi_{xx}(l, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \\ \psi(x, 0) &= \psi_{yy}(x, 0) = \psi(y, l) = \psi_{yy}(y, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Тогда для любого фиксированного $T > 0$, существует единственное решение обратной задачи (1) – (5), принадлежащее классу $C[0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sabitov K.B., Zainullov A.R. Inverse Problems for a Two -Dimensional Heat Equation with Unknown Right-Hand Side, // *Russian Mathematics*, 2021, Vol. 65, No. 3, pp. 75 – 88.

[2] Сафаров Ж.Ш., Дурдиев Д.К. Об одной обратной задаче в прямоугольной области, // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Международная научная конференция, Ташкент, 6-8 октября, 2022 год, с. 171-173.

[3] Сафаров Ж.Ш., Жураева М.М. Investigation of the hyperbolic type integro-differential equation in a square by the Fourier method, // *Научный вестник Бухарского Государственного Университета*, 2022, №4(92). -С.3-10.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛАБО ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

¹Сафаров Ж.Ш., ²Хайдаров Б.Х.

¹Институт Математики имени В. И. Романовского АН РУз,

²Бухарский государственный университет

e-mail: ¹j.safarov65@mail.ru, ²behzodhaydarov15@gmail.com

В ограниченной по переменной y области Ω рассматривается

интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \int_0^t k(x, \tau) u(x, y, t - \tau) d\tau = p(y)u, \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u_y|_{y=0} = \delta(x)\delta'(t), \quad u_y|_{y=l} = 0, \quad (3)$$

где $\Omega = \{(x, y, t) : x \in R, 0 < y < l, t > 0\}$, $\delta(\cdot)$ – дельта функция Дирака, $p(y)$ – заданная функция.

Нахождении функции $u(x, y, t) ((x, y, t) \in \Omega)$, при известной $k(x, t)$ назовем прямой задачей.

Обратная задача заключается, в определении ядра интегрального члена $k(x, t)$, если относительно решения прямой задачи (1.1)–(1.3) имеется дополнительная информация

$$u(x, 0, t) = f(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (5)$$

где $f(x, t)$ достаточно гладкая функция.

Задача (1) – (4) относится к числу многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Существует несколько подходов к решению многомерных обратных задач. Одним из таких методов является сведение задачи к серии одномерных задач. В работах [1] – [3] исследовались задачи нахождения двумерных коэффициентов гиперболических уравнений в предположении, что искомые коэффициенты от одной из переменных зависят слабо. Развивая методы решения обратных задач, использованные в вышеупомянутых работах, мы в настоящей статье исследуем задачу восстановления ядра уравнения (1) когда задано дополнительное условие (4), относительно решения прямой задачи (1) – (3). При этом предполагается, что ядро $k(x, t)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x

$$k(x, t) = k_0(t) + \varepsilon x k_1(t) + \dots$$

где ε – малый параметр.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод последовательного нахождения k_0 и k_1 с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$ для $t \in [0, T]$, где $T > 0$ – любое фиксированное число. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать образ Фурье от функции $f(x, t)$ по x для одного фиксированного значения преобразования. Задача нахождения $k_0(t)$ сводится к решению системы нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа, а $k_1(t)$ – линейных интегральных уравнений.

Как в первом, так и во втором случае доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости полученных обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blagoveshchenskiy A.S., Fedorenko D.A. Equations of acoustics in a weakly horizontally inhomogeneous medium, *Notes of scientific seminars in Moscow*, 2008, vol.354, pp. 81 – 99.

[2] Blagoveshchenskiy A.S. On a quasi-two-dimensional inverse problem for a wave equation, *Tr. MIAN USSR*, no.115 (1971), pp. 57–69.

[3] Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, Т.32, №3, 2022. Россия, Ижевск-С. 383-402.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

¹Сафаров Ж.Ш., ²Хасанов К.Х.

¹Ташкентский университет информационных технологий,

²Бухарский государственный университет

e-mail: ¹j.safarov65@mail.ru, ²hasanovqodir007@gmail.com

В области $\Omega = \{(x, t) : x \in R, t > 0\}$, рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + \int_0^t h(\tau) u(x, y, t - \tau) d\tau = \delta(t - x) f(x), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта функция Диарка, $f(x)$ – заданная функция.

Нахождении функции $u(x, t)((x, t) \in \Omega)$, при известной $h(t)$ назовем прямой задачей.

Обратная задача заключается, в определении ядра интегрального члена $h(t), t > 0$, если относительно решения прямой задачи имеется дополнительная информация

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u_x(0, t) = g_2(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ достаточно гладкие, заданные функции.

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений, это относительно новое и бурно развивающиеся направление теории обратных задач. В работах [1] – [4] изучены прямые и обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа. В частности, работа [4] посвящена исследованию прямой задачи (1) – (2). В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости обратной задачи (1) – (3), определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения колебания бесконечной струны. Получена теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

Теорема. Пусть функция $f(t) \in C^2(0, \infty)$, а функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ таковы, что, $g_1(t) \in C^3(0, T)$, $g_2(t) \in C^2(0, T)$, кроме того выполнены условия

$g_1(0) = \frac{1}{2}, \quad g_2(0) = g_1'(0) = g_2'(0) = 0, \quad g_2''(t) = \frac{1}{2} f(0), \quad \text{тогда}$ решения обратной задачи (1) – (3), для любого $T > 0$, существует, единственно и принадлежит классу $C(0, T)$.

Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К последней в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Дурдиев Д.К. Обратные задачи для сред с последствием, Ташкент: Турон-Икбол, 2014, -219 с.
- [2] Сафаров Ж.Ш. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегро - дифференциального уравнения колебания бесконечной струны, // *Узбекский математический журнал*, №1, 2014, Ташкент-С. 90-96.
- [3] Сафаров Ж.Ш. Задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения с гладкими данными в ограниченной области, // *Бюллетень института Математики*, 2020, №2, с.97-102.
- [4] Сафаров Ж.Ш., Хасанов К.Х. О разрешимости одного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа, // *ABSTRACTS of the Uzbekistan-Malaysia international conference COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES*, September 16-17, 2022, Tashkent С.92-93

ИНТЕГРАЛ ГЕОМЕТРИЯ МАСЕЛЕСИНИҢ СЫНЫҚ СЫЗЫҚЛАР КӨПЛИГИНДЕГИ КЕРІЛЕНІҢ ФОРМУЛАСЫ

^{1,2}Сейпуллаев Ж., ^{1,2}Сеидуллаев А., ¹Орынбаева Г.

¹Қарақалпақ мәмлекетлик университети, Нөкис, Өзбекстан

²Математика институты ҚР бөлими, Нөкис, Өзбекстан

e-mail: s_abat@karsu.uz

Хәзирги күнде функцияларды берилген интеграл характеристикалары тийкарында қайта тиклеу хәм олардың математикалық моделлерин дүзиу математика, есаплау математикасы, математикалық моделлестиреу хәм объектке бағдарланған программаластыру сыяқлы тараулардағы изертлеулердин объекти сыпатында әҳмийетли орын ийелейди. Бул жерде интеграл геометрия мәселелеринен пайдаланып, объектлердин ишки қурылысларын қайта тиклеу, оған зыян келтирмеген ҳалда объект ишки қурылыслары ҳаққындағы жасырын мағлыұматларды алыуға айрықша итибар бериледи.

Мәселениң қойылыуы: Мейли $f(x, y)$ функция $L_H = \{(x, y): x \in R, y \in [0; H], H < \infty\}$ кесиминде хәм төмендеги интеграл теңлеме менен анықланған болсын:

$$\int_{\Psi} \operatorname{sgn}(x - \xi) \frac{u(x, y)}{\sqrt{e^{y-\eta}}} ds = f(x, y) \quad (1)$$

бул жерде $\Psi = \{(\xi, \eta) : |x - \xi| = y - \eta, 0 \leq \eta \leq y \leq \sqrt{H}\}$.

Теорема: Онда (1) теңлеменин шешими $C_0^2(L_H)$ класста жалғыз, яғный

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{f(x, y)}{2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^y \frac{f(x, y)}{\sqrt{e^{y-\eta}}} d\eta \right)$$

хәм турақлылық теңсізлігін қанаатландырады

$$\|u(x, y)\|_{W_2^{0,1}} \leq C \|f(x, y)\|_{W_2^{2,2}},$$

бул жерде C – турақлы сан.

Әдебиятлар

[1] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Наука, 1980.

[2] А. Х. Бегматов, А. О. Пиримбетов, А. К. Сеидуллаев, “Слабо некорректные задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе ломаных”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 15:1 (2015), 5–12.

ФОРМУЛЫ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА С ОСОБЕННОСТЬЮ В ПОТЕНЦИАЛЕ

Танирберген М.Б., Собиров К.

Каракалпакский государственный университет, Нукус Узбекистан

e-mail: tanirbergenovmurtbek384@gmail.com

В 1994 году П.Д.Лакс [1] вычислил элементарным способом регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля, т.е. методом «деформации» потенциала по параметру $t \in [0, 1]$, который справедлив для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

В настоящей заметке методом Лакса вычисляется регуляризованный след для оператора Дирака с особенностью в потенциале.

Рассмотрим следующий дифференциальный оператор в $L_2(0, \pi)$

$$Dy \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & -\frac{1}{x} + q(x) \\ -\frac{1}{x} + q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – действительные функции из класса $C^2[0, \pi]$.

Лемма 1. Пусть $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 0$. Тогда:

1) общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\begin{cases} \phi_1(x, \lambda) = C_1 \left(\frac{\cos \lambda x}{\lambda} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda^2} \right) + C_2 \left(-\sin \lambda x - \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \right), \\ \phi_2(x, \lambda) = C_1 \frac{\sin \lambda x}{\lambda} + C_2 \cos \lambda x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda \neq 0,$$

$$\begin{cases} \phi_1(x, \lambda) = \frac{C_1}{x}, \\ \phi_2(x, \lambda) = C_2 x, \end{cases} \quad \text{при } \lambda = 0;$$

2) собственные значения и ортонормированные собственные вектор-функции граничной задачи (1), (2) соответственно имеют вид:

$$\lambda_n = n, \quad n \in Z, \quad n \neq 0;$$

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \cos nx - \frac{1}{x} \frac{\sin nx}{n} \\ \sin nx \end{pmatrix}, \quad n \in Z, \quad n \neq 0;$$

3) выполняются тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n,1}^2(x) + y_{-n,1}^2(x) - y_{n,2}^2(x) - y_{-n,2}^2(x)] = \frac{1}{2} [\delta(x) + \delta(x - \pi)],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2y_{n,1}(x)y_{n,2}(x) + 2y_{-n,1}(x)y_{-n,2}(x)] = 0, \quad (0 < x < \pi)$$

где $\delta(x)$ – «дельта» – функция Дирака.

Лемма 2. Следующие ряды сходятся в обобщенном смысле

$$\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)], \quad \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t)$$

и их сумма не зависит от t . Здесь $\sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{-n})$.

Теорема. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные значения граничной задачи (1), (2), тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_{-n}) = \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)].$$

Доказательство. Рассмотрим семейство операторов

$$D(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tp(x) & -\frac{1}{x} + tq(x) \\ -\frac{1}{x} + tq(x) & -tp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi$$

с граничными условиями (2). Здесь параметр $t \in [0, 1]$. Очевидно, что $D(1) = D$. Пусть $\{\lambda_n(t)\}$, $n \in Z$ – собственные значения оператора $D(t)$, а

$\{y_n(x, t)\}$, $n \in Z$ ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным значениям. Тогда

$$D(t)y_n = \lambda_n(t)y_n, \quad (D(t)y_n, y_n) = \lambda_n(t).$$

Отсюда дифференцируя по t последнее равенство, и учитывая ортонормированность собственных функций, имеем:

$$(\dot{D}(t)y_n, y_n) = \dot{\lambda}_n(t), \quad (3)$$

где

$$\dot{D}(t)y_n = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x)y_{n1} + q(x)y_{n2} \\ q(x)y_{n1} - p(x)y_{n2} \end{pmatrix},$$

подставляя последнее выражение в (3), получаем

$$\int_0^\pi \{p(x)[y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)] + 2q(x) \cdot y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t)\} dx = \dot{\lambda}_n(t). \quad (4)$$

Интегрируя (4) по t на отрезке $[0, 1]$, затем суммируя полученные равенства по всем n получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi p(x) \int_0^1 \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [y_{n1}^2(x, t) - y_{n2}^2(x, t)] dt dx + \\ & + \int_0^\pi q(x) \int_0^1 \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} 2y_{n1}(x, t)y_{n2}(x, t) dt dx = \sum_{0 \neq n = -\infty}^{\infty} [\lambda_n(1) - \lambda_n(0)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее доказательство теоремы вытекает из утверждений леммы 2 и свойств «дельта»-функции Дирака.

Литература

- [1] Lax P. D. Trace Formulas for the Schroedinger operator // Comm. Pure and Appl. Math. – 1994. – vol. XLVII. – p. 503-512.
- [2] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – Москва, «Наука», 1988.
- [3] Левитан Б.М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля // УМН. – 1964. – т. 19 (115), № 1. – стр. 161-165.
- [4] Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об одном способе вычисления регуляризованного следа для оператора Дирака // УзМЖ, –1999, № 4, стр.77-82.
- [5] Яхшимуратов А.Б. Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака методом П.Д. Лакса. // УзМЖ, –1998, № 6, стр. 76-80.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Танирберген М.Б., Собитов С.

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

e-mail: tanirbergenovmuratbek384@gmail.com

Требуется найти ограниченное решение $u(x, t)$ ($t \geq 0$, $0 < x < +\infty$) уравнения теплопроводности, удовлетворяющее данному начальному условию и условию, поставленному на одном из концов стержня:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, +\infty), \quad (2)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad h = \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Для нахождения решения нашей задачи применим интегральное преобразование Фурье с ядром

$$K(x, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x}{\lambda^2 + h^2}.$$

Тогда образ Фурье функции $u(x, t)$ с данным ядром является функция

$$\bar{u}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi. \quad (4)$$

Умножим обе части уравнения

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2}$$

на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x}{\lambda^2 + h^2}$ и проинтегрируем по ξ от 0 до $+\infty$,

учитывая,

что функция $u(x, t)$ и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю

при $\xi \rightarrow +\infty$. Применяя интегрирование по частям и используя граничное условие $u'_\xi(0, t) - hu(0, t) = 0$, мы получим:

$$\begin{aligned} & a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi = \\ & = -\lambda^2 a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi = -(a\lambda)^2 \bar{u}(\lambda, t), \end{aligned}$$

аналогично

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi = \frac{d\bar{u}(\lambda, t)}{dt}.$$

Отсюда имеем для интегрального представления (4) обыкновенное однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\bar{u}(\lambda, t)}{dt} + (a\lambda)^2 \bar{u}(\lambda, t) = 0. \quad (5)$$

$$\bar{u}(\lambda, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u_0(\xi) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi = \bar{u}_0(\lambda). \quad (6)$$

Методом вариации произвольной постоянной получаем решение уравнения (5) при начальном условии (6) в виде:

$$\bar{u}(\lambda, t) = \bar{u}_0(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (7)$$

Лемма. Для интегрального преобразования

$$\bar{u}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\xi$$

справедлива следующая формула обращения

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}(\lambda, t) (\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x) d\lambda. \quad (8)$$

После этого с помощью обратного преобразования Фурье (8) «восстановим оригинал», т.е. найдем функцию $u(x, t)$ по ее образу Фурье.

Выполним переход к оригиналу по формуле

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}_0(\lambda) e^{-(a^2 t) \lambda^2} (\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} u_0(\xi) \left[\int_0^{+\infty} e^{-(a^2 t) \lambda^2} (\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) d\lambda \right] d\xi. \end{aligned}$$

Далее, упростим подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} &(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x) \left(\frac{\lambda \cos \lambda \xi + h \sin \lambda \xi}{\lambda^2 + h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \lambda(x + \xi) + \cos \lambda(x - \xi)) + \frac{\lambda h \sin \lambda(x + \xi) - h^2 \cos \lambda(x + \xi)}{\lambda^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Тогда из формул

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(a^2 t) \lambda^2} (\cos \lambda(x + \xi) + \cos \lambda(x - \xi)) d\lambda &= \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}} \left(e^{-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}} \right); \\ \int_0^{+\infty} e^{-(a^2 t) \lambda^2} \frac{\lambda \sin \lambda(x + \xi)}{\lambda^2 + h^2} d\lambda &= \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-h\eta} \left(e^{-\frac{(x + \xi - \eta)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x + \xi + \eta)^2}{4a^2 t}} \right) d\eta; \\ \int_0^{+\infty} e^{-(a^2 t) \lambda^2} \frac{\cos \lambda(x + \xi)}{\lambda^2 + h^2} d\lambda &= \frac{\sqrt{\pi}}{4ha\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-h\eta} \left(e^{-\frac{(x + \xi - \eta)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x + \xi + \eta)^2}{4a^2 t}} \right) d\eta, \end{aligned}$$

получаем окончательное решение нашей задачи (1)–(3)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} u_0(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - h\eta} d\eta \right) d\xi.$$

Литература

- [1] Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Москва, «Наука», 1969.
- [2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва, «Наука», 1972.
- [3] Салохиддинов М. Математик физика тенгламалари. Тошкент, «Ўзбекистон» нашриёти, 2002 й.
- [4] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Москва, «Наука», 1972.
- [5] Сборник задач по уравнениям математической физики // Под ред. В.С. Владимирова, Москва, Физматлит, 2001.
- [6] Ю.Д. Панов, Р.Ф. Егоров. Математическая физика. Методы решения задач. Екатеринбург, 2005.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Турсунов Ф.Р., Махмудов Ш. Т.

Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова
e-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru, maxmudovshohmalik4@gmail.com

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ точки двумерного Евклидова пространства и G - неограниченная область в R^2 лежащая внутри полосы $0 < y_2 < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$ граница, которой состоит из прямой $T: y_2 = 0$ и некоторой кривой $S: y_2 = F(y_1)$ удовлетворяющей условиям $0 < F(y_1) < h$, $|F'(y_1)| < M < \infty$. Положим $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$.

Предположим, что для некоторого $b_0 > 0$ выполняется условия:

$$\int_{\partial G} \exp\{-b_0 c h \rho_1 |y'| \} dS < \infty, \quad 0 < \rho_1 < \rho.$$

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0. \quad (1)$$

Обозначим

$$K_\rho(G) = \{U(y) \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}) : U(y) + \text{grad} U(y) \leq \exp[o(\exp \rho |y'|)], |y'| \rightarrow \infty, y \in G\}.$$

Постановка задачи. Требуется найти гармоническую функцию $U(y) \in K_\rho(G)$, у которого известны значения на части S границы ∂G , т.е

$$U(y)|_S = f(y), \quad \frac{\partial U(y)}{\partial n} \Big|_S = g(y). \quad (2)$$

Здесь $f(y) \in C'(S)$ и $g(y) \in C(S)$ -заданные функции и $\partial / \partial n$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G .

Рассматриваемая задача (1) - (2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В работе [1] рассматривается на части границы области по данным Коши задача приближенного восстановления гармонической функции и найдено регуляризованное решение.

Для рассматриваемой области функцию Карлемана впервые построил Ш. Ярмухамедов [2] в своей докторской диссертации следующим образом:

$$\Phi_{\sigma}(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{2\pi K(x_2)}, \quad (3)$$

где

$$\varphi(x, y) = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{K(w)}{w - x_2} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad K(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w - x_2 + 2h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{2h} e^{\sigma x_2}, \quad (4)$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad x' = (x_1, 0), \quad y' = (y_1, 0), \quad 0 < x_2 < h.$$

В формуле (4) мы выбираем

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2 + 3h}, \quad K(x_2) = \frac{1}{3h} e^{\sigma x_2^2}$$

и отделяя мнимую часть с учетом (3) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}(x, y) = & -\frac{3h}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \left[\int_0^{\infty} \frac{2(y_2 - x_2)e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} udu + \right. \\ & + \int_0^{\infty} \frac{3he^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} udu + \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u^2 + \alpha^2} e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} udu - \\ & \left. - \int_0^{\infty} \frac{(y_2 - x_2 + 3h)(y_2 - x_2)e^{-\sigma u^2} \sin 2\sigma y_2 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)(u^2 + \alpha^2 + (y_2 - x_2 + 3h)^2)} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $U(y) \in K_{\rho}(G)$ удовлетворяет условию роста

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M \exp \left[a \cos \left(y_2 - \frac{h}{2} \right) \exp \rho_1 |y'| \right], \quad a \geq 0, \quad y \in \partial G, \quad M = \text{const} \quad (6)$$

то справедлива интегральная формула Грина [2]

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_{\sigma}(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_{\sigma}(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (7)$$

Предположим, что $U(y) \in K_{\rho}(G)$ ограничена вместе с нормальной производной на части ∂G , т.е:

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \quad y \in T. \quad (8)$$

В этих предположениях в формулу (6) положим $a = 0$. Обозначим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y) \in K_\rho(G)$ на части S границы ∂G удовлетворяет условию (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство (8). Тогда для любых $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливо оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \psi_2(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \varphi_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где M - положительное число и

$$\begin{aligned} \psi_2(\sigma, x_2) &= \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma x_2}} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma x_2(3h-x_2)}} + \frac{3h\sqrt{\pi}(x_2+3h)}{\sqrt{\sigma x_2(3h-x_2)^2}} + \frac{h\sqrt{\pi}(6x_2\sigma+3)}{4\sqrt{\sigma x_2}}. \\ \varphi_1(\sigma, x_2) &= \left(\frac{3h\sqrt{\sigma\pi}}{2} + \frac{9h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{9h^2\sqrt{\sigma\pi}}{4(3h-x_2)} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma(3h-x_2)^3}} + \right. \\ &+ \frac{12h\sqrt{\sigma\pi}}{2(3h-x_2)} + \frac{21h\sqrt{\pi}+6h\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}+9h^2\sqrt{\pi}}{2x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^3}} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{x_2^2\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \\ &+ \left. \frac{9h^2\sqrt{\sigma\pi}}{(3h-x_2)^2} + \frac{27h^2\sqrt{\pi}}{2x_2^2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}+9h^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma x_2^4}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma x_2^2}} + \frac{9h\sqrt{\sigma\pi}}{2x_2} + 3h\sigma \right) e^{-\sigma x_2^2}, \\ \varphi_2(\sigma, x_2) &= \left(\frac{3h\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{3hx_2\sqrt{\sigma\pi}}{2(3h-x_2)} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{27h^2\sqrt{\pi}}{4x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^3}} + \right. \\ &+ \frac{15h\sqrt{\sigma\pi}+24hx_2\sqrt{\sigma\pi}}{4(3h-x_2)} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{6hx_2\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^4}} + \frac{6h\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \\ &+ \frac{3h\sqrt{\pi}}{2x_2^2\sqrt{\sigma(3h-x_2)}} + \frac{3h\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^3}} + \frac{3hx_2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{9h\sqrt{\pi}}{x_2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + 3h\sigma + \\ &+ \left. 3h\sigma^2 + \frac{9h\sqrt{\sigma\pi}}{4x_2} + \frac{3h\sqrt{\pi}\sigma+3h\sqrt{\pi}\sigma^2x_2}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}\sigma+9h^2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} + \frac{9h^2\sqrt{\pi}}{x_2^2\sqrt{\sigma(3h-x_2)^2}} \right) e^{-\sigma x_2^2}. \end{aligned}$$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши. // Математические заметки, 2008, Том 83, выпуск 5. С.763-778.

[2] Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Дисс. докт. физ.-матем. наук, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, (1983).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

^{1,2}Уразбоев Г.У., ¹Хасанов М. М., ²Атаназарова Ш.Э.

¹Ургенчский государственный университет,

²Институт математики имени В.И. Романовского АНРУз.

e-mail: gayrat71@mail.ru, hmuzaffar@mail.ru, atanazarova94@gmail.com

В работах [1-6] были изучены гамильтонова структура, бесконечное множество законов сохранения, N-солитонные, квазипериодические волновые решения для уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка.

В данной работе изучается уравнение КдФ отрицательного порядка

$$\begin{cases} q_t = 2pp_x \\ pq + p_{xx} = 0 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in R^1, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} q(x, t)|_{t=0} &= q_0(x), \\ p(x, t)|_{x=0} &= p_0(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_0(x)$ и $p_0(t)$ действительные функции причём $q_0(x)$ π -периодическая функция. Требуется найти действительные функции $q(x, t)$ и $p^2(x, t)$, которые π -периодические по переменной x :

$$p^2(x + \pi, t) \equiv p^2(x, t), \quad q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^1 \quad (3)$$

и удовлетворяют условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q(x, t) &\in C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0) \\ p^2(x, t) &\in C_x^2(t > 0) \cap C(t \geq 0) \end{aligned} \quad (4)$$

При изучении задачи (1)-(4) используется следующий оператор Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + (-q(x, t))y = \lambda y, \quad x \in R^1. \quad (5)$$

Через $s(x, \lambda, t)$ обозначим решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = 0$, $s'(0, \lambda, t) = 1$.

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]$. Собственные значения $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$ задачи Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, для уравнения (5) вместе со знаками $\sigma_n = \text{sign} \left\{ s'(\pi, \xi_n) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n)} \right\}$, $n \in \mathbb{Z}$ называются спектральными параметрами задачи (5).

Теорема. Пусть $(q(x,t), p(x,t))$ - решение задачи (1)-(4). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t , а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n=1, 2, \dots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n+1} \sigma_n(t) \left\{ \frac{1}{2\xi_n} p^2(0,t) \right\} \times \\ \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0 , $n \geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Следствие. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Метод обратной спектральной задачи.

Литература

- [1]. Qiao Z.J., Fan E.G. Negative-order Kortewe-de Vries equations, Phys. Rev., 2012, vol. 86, issue 1, pp. 016601. [https:// doi:10.1103/PhysRevE.86.016601](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016601)
- [2]. Chen J.B. Quasi-periodic solutions to a negative-order integrable system of 2-component KdV equation, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2018, vol. 15, issue 3, pp. 1-34. <https://doi.org/10.1142/S0219887818500408>
- [3]. Qiao Z.J., Li J.B. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions, Euro. Phys. Lett., 2011, vol. 94, pp. 50003. [https://doi: 10.1209/0295-5075/94/50003](https://doi.org/10.1209/0295-5075/94/50003)
- [4]. Zhao S., Sun Y. A Discrete negative order potential Korteweg–de Vries equation, Z. Naturforsch, 2016, vol. 71, issue 12, pp. 1151-1158. [https://doi 10.1515/zna-2016-0324](https://doi.org/10.1515/zna-2016-0324)
- [5]. Chen, J. Quasi-periodic solutions to the negative-order KdV hierarchy, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2019, vol. 15, pp. 1850040. <https://doi.org/10.1142/S0219887818500408>
- [6]. Rodriguez M., Li J., Qiao Z. Negative Order KdV equation with no solitary traveling waves, Mathematics, 2022, vol. 10, pp. 48. [https:// doi.org/10.3390/math10010048](https://doi.org/10.3390/math10010048)

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ

Уринов А. К., Усмонов Д. А.

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

e-mail: urinovak@mail.ru, usmonov-doniyor@inbox.ru

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах и дифференциальных уравнений, содержащие таких операторов [1], [2], [3].

В данной работе исследуется задача Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего дробный дифференциальный оператор типа оператора Капуто с функцией Бесселя в ядре:

$${}_C D_{0x}^{\alpha, \gamma} y(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} \bar{J}_{(1-\alpha)/2} [\gamma(x-t)] \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) y(t) dt,$$

где $\bar{J}_\nu(z)$ - функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствами

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) (z/2)^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! (\nu+1)_k}$$

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера [4], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [5].

Из оператора ${}_C D_{0x}^{\alpha, \gamma} y(x)$ при $\gamma = 0$ следует дробный дифференциальный оператор Капуто [6]:

$${}_C D_{0x}^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} y''(t) dt.$$

Рассмотрим уравнение

$${}_C D_{0x}^{\alpha, \gamma} y(x) + \lambda y(x) = f(x), \quad x \in (0, T) \quad (1)$$

и исследуем следующую начальную задачу для него, где $y(x)$ - неизвестная функция, а $f(x)$ - заданная функция; $\alpha, \gamma, \lambda, T$ - заданные действительные числа, причем $1 < \alpha < 2$, $T > 0$:

Задача Коши. Найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям

$$y(0) = A_1, \quad y'(0) = A_2, \quad (2)$$

где A_1, A_2 - заданные действительные числа.

Доказано справедливость следующих теорем.

Теорема 1. Если $f(x) = x^{-p} f_1(x)$, $f_1(x) \in C[0, T]$, $0 \leq p < \alpha - 1$, то решение задачи Коши $\{(1), (2)\}$ существует и определяется формулой

$$y(x) = A_1 \mathbb{E}_{\alpha, 1, (-1/2)} \left[-\lambda x^\alpha; \gamma x \right] + A_2 x \mathbb{E}_{\alpha, 2, 1/2} \left[-\lambda x^\alpha; \gamma x \right] + \int_0^x (x-z)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha, \alpha, (\alpha-1)/2} \left[-\lambda (x-z)^\alpha; \gamma (x-z) \right] f(z) dz, \quad (3)$$

где

$$\mathbb{E}_{\alpha, \beta, \theta} [x; y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \bar{J}_{\alpha n/2 + \theta}(y). \quad (4)$$

Очевидно, что (4) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [7]:

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Теорема 2. Если $\lambda > 0$, то для решения (3) справедливо неравенство

$$|y(x)| \leq |A_1| C_1 + |A_2| C_2 + C_3 \int_0^T |f(z)| dz,$$

где C_1 , C_2 и C_3 - некоторые положительные постоянные.

Литература

[1] Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel. 1969.

[2] Liguó Y., Song Z., Zhouchao W. Comparison theorems of tempered fractional differential equations // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2022. – 231. pp. 2477-2485.

[3] Уринов А.К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувилля с помощью функции Бесселя // Бюллетень Института математики. – 2022. – 5(1). – С. 108-155.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – Москва. Наука, – 1965. – 296 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – Москва. Наука, – 1966. – 296 с.

[6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006. – 522 p.

[7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. – Москва. Наука, – 1967. – 300 с.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЕКТОРАМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ И СМЕШАННЫМИ МАКСИМУМАМИ

Файзиев А. К.

Ташкентский государственный экономический университет

Ташкент, Узбекистан

e-mail: fayziyev.a@inbox.ru

На интервале $[0, T]$ по $t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, p$ рассмотрены вопросы существования и конструктивных методов вычисления единственных решений системы нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.

$$x''(t) = f \left(t, x(t), \int_0^T \Theta(t, s, \max \{ x(\tau) | \tau \in [\lambda_1(s) : \lambda_2(s)] \}) ds \right) \quad (1)$$

где $t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, p, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T, x \in X, X$ – замкнутая ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n, f(t, x, y) \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda_j(t) < T, j = 1, 2, [\lambda_1(t) : \lambda_2(t)] = [\min \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t) \}; \max \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t) \}], \lambda_j(t) = \lambda_j(t, x(t)), j = 1, 2,$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^T |\Theta(t, s, x)| ds < \infty.$$

Уравнение (1) исследуем с двумя нелинейными условиями

$$A_1(t)x(0^+) + B_1(t)x(T^-) = C_1 + D_1(t, x(t)), \quad (2)$$

$$A_2(t)x'(0^+) + B_2(t)x'(T^-) = C_2 + D_2(t, x(t)) \quad (3)$$

и два нелинейных импульсных условия

$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

$$x'(t_i^+) - x'(t_i^-) = G_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (5)$$

где $A_i(t), B_i(t), n \times n$ -мерные матричные функции, $C_1 \in \mathbb{R}^n$ и $C_2 \in \mathbb{R}^n$ переопределение векторов, $D_i(t, x(t)) \in \mathbb{R}^n$ нелинейная вектор-функция, $i = 1, 2, F_i, G_i \in \mathbb{R}^n, x(t_i^+) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} x(t_i + \nu), x(t_i^-) = \lim_{\nu \rightarrow 0^-} x(t_i - \nu)$ – правосторонний и левосторонний пределы функции $x(t)$ в точке $t = t_i$ соответственно.

Чтобы найти векторы переопределения, мы используем следующие два промежуточных условия

$$x(\bar{t}) = E_1, \quad E_1 \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \bar{t} < T, \quad \bar{t} \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

$$x'(\bar{t}) = E_2, \quad E_2 \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \bar{t} < T, \quad \bar{t} \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (7)$$

$C([0, T], \mathbb{R}^n)$ есть обозначение Банахова пространства, состоящего из непрерывной вектор-функции $x(t)$, определенной на отрезке $[0, T]$, с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{0 \leq t \leq T} |x_j(t)|}.$$

$PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ является обозначением следующего линейного векторного пространства

$$PC([0, T], \mathbb{R}^n) = \{x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n; x(t) \in C((t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^n), i = 1, \dots, p\},$$

где $x(t_i^+)$ и $x(t_i^-)$ существуют и ограничены; $x(t_i^-) = x(t_i)$. Обратите внимание, что линейное векторное пространство $PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ является Банаховым пространством со следующей нормой

$$\|x\|_{PC} = \max \left\{ \|x\|_{C((t_i, t_{i+1}])}, i = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Формулировка проблемы. Найдите тройку неизвестной функции $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ и переопределение векторов $C_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, 2$, что функция $x(t)$ для всех $t \in [0, T], t \neq t_i, i = 1, 2, \dots, p$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению второго порядка (1), нелинейных двухточечных условий (2), (3) и $t = t_i, i = 1, 2, \dots, p, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$ удовлетворяет нелинейным предельным условиям (4), (5) и промежуточным условиям (6), (7).

ЛИТЕРАТУРА

[1].Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima, Наносистемы: Физика. Химия. Математика. 2022. Т. 13. № 1. С. 36–44. doi: 10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44.

[2].Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector, Lobachevskii Journ. Math., 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2332–2340. doi: 10.1134/S1995080222110312.

[3].Abildayeva A., Assanova A., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model. Eurasian Math. Journ. 2022. vol. 13. № 2. pp. 8–17.

[4].Assanova A. T., Dzhobulaeva Z. K., Imanchiyev A. E. A multi-point initial problem for a non-classical system of a partial differential equations. Lobachevskii Journ. Math. 2020. vol. 41. № 6, pp. 1031–1042. doi:10.1134/S1995080220060049.

[5].Minglibayeva B. B., Assanova A. T. An existence of an isolated solution to nonlinear twopoint boundary value problem with parameter. Lobachevskii Journ. Math. 2021. vol. 42. № 3. pp. 587–597. doi: 10.1134/S199508022103015X.

[6].Yuldashev T. K., Fayziyev A. K. Inverse problem for a second order impulsive system of integro-differential equations with two redefinition vectors and mixed maxima, Наносистемы: Физика. Химия. Математика. 2023. Т. 14. № 1. С. 13–21. doi: [10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21](https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-1-13-21)

НАЧАЛЬНО-ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

¹Фаязов К.С., ²Абдуллаева З.Ш.

¹Туринский политехнический университет в городе Ташкенте

²Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент,
Узбекистан

e-mail: kudratillo52@mail.ru, sabina-07-14@mail.ru

Теория некорректных и внутренне-краевых задач для неклассических уравнений смешанного типа является важнейшим разделом современной теории дифференциальных уравнений. Данное направление является наиболее интенсивно развивающимся направлением в математического моделирования, которое связано с самыми разнообразными прикладными проблемами в области геофизических наблюдений, в частности с задачами газовой динамики, механики сплошной среды, задач распространения акустических волн, математической биологии, а также при математическом моделировании различных других прикладных задач. Дифференциальные уравнения в частных производных смешанного и составного типа рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. В работах К.Б. Сабитова, Э.М. Сафина [1] рассмотрена обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области связанная с поиском неизвестной правой части. Характерной особенностью многих внутренних задач является их некорректность в классическом смысле. В качестве классического примера внутренней задачи для дифференциальных уравнений можно указать задачу аналитического продолжения. По-видимому, впервые она как некорректная задача была рассмотрена М. М. Лаврентьевым. По определению М. М. Лаврентьева, под внутренними задачами понимают определение решения уравнения по её известным значениям внутри области регулярности, а под внутренне-краевыми задачами, когда задаются исходные данные как внутри области регулярности, так и на границе области. Исследование корректности по Тихонову внутренних задач для уравнения параболического и гиперболического типов, а именно, доказательство единственности и получение оценки устойчивости решения задач для этих уравнений с данными на дискретных множествах точек проведены в работах М. М. Лаврентьева и Б.К. Амонова.

ПРИМЕРЫ ВНУТРЕННИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Задача для системы уравнений смешанного типа с краевыми данными и данными внутри области регулярности. Основной проблемой является доказательство условной корректности упомянутой задачи, а именно доказательство единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) + \operatorname{sgn}(x)v_{xx}(x,t) = f(x,t), \\ u_{tt}(x,t) + \operatorname{sgn}(x)u_{xx}(x,t) = v(x,t), \end{cases} \quad (1)$$

требуется найти решение $(u(x,t), v(x,t))$ системы уравнений (1), области $\Omega = \{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 < t < T\}$, где $f(x,t)$ - заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющее условиям: начальным и внутренним

$$\left. \begin{aligned} v(x,0) &= \varphi_0(x), v(x,t_1) = \varphi_1(x) \\ u(x,0) &= \psi_0(x), u(x,t_1) = \psi_1(x) \end{aligned} \right\}, 0 < t_1 < T, -1 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

а также граничным условиям и условиям склеивания.

Пример 1. (см. [3]) Пусть $f = 0$. Докажем, что в задаче (1)-(2) отсутствует непрерывная зависимость решения от исходных данных $\varphi_{0k}^-(x)$.

Пусть $\varphi_{0k}^-(x) = \frac{1}{\sqrt{q_n}} X_k^-(x)$, $\varphi_{0k}^+(x) = 0$, $\varphi_{1k}^\pm(x) = \psi_{0k}^\pm(x) = \psi_{1k}^\pm(x) = 0$. Используя метод

разделения переменных, имеем $v_k(x,t) = \frac{\sin \mu_k(t_0 - t)}{\sin \mu_k t_0} \varphi_{0k}^-(x)$. Так как существует

последовательность целых чисел p_n, q_n такая $|\alpha - p_n / q_n| < 1 / q_n^2$, что α - иррациональное число, то $\left| \sin \left(\mu_k t_0 \right) \right| = \left| \sin \left(\frac{\mu_k}{\pi} t_0 - p_n \right) \pi \right|$.

Предполагаем, $\frac{\mu_k}{\pi} t_0 = \alpha q_n$, что $\left| \sin \left(\mu_k t_0 \right) \right| = \left| \sin \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n} \right) \pi q_n \right| < \pi / q_n$.

Действительно, для фиксированного иррационального α положим $\varphi_{0k}^-(x) = \frac{1}{\sqrt{q_n}} X_k^-(x)$, $\varphi_{0k}^+(x) = 0$, $\varphi_{1k}^\pm(x) = \psi_{0k}^\pm(x) = \psi_{1k}^\pm(x) = 0$, то для решения

$$v_k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{q_n}} \frac{\sin \mu_k(t_0 - t)}{\sin \mu_k t_0} X_k^-(x)$$

$$\sup_{x,t \in D} |v_k(x,t)| > \sup_{x,t \in D} \frac{\sqrt{q_n}}{\pi} \left| \sin \mu_k(t_0 - t) \sin \mu_k(1+x) \right| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

а $\varphi_k^-(x) = \frac{1}{\sqrt{q_n}} \frac{\sin \mu_k(1+x)}{\sin \mu_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Это означает некорректность задачи (1)-

(2).

Пример 2. Пусть $f \neq 0$. Исследуемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. Возникает проблема малых знаменателей и существования, единственность решения зависит от числовых свойств данных задачи. Доказаны теорема о единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности.

Литература

[1] Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // Матем. Заметки. 2010. том 87, выпуск 6. С. 907-918. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6577>

[2] Fayazov K.S., Abdullayeva Z. Sh. Conditional correctness of the internal boundary value problem of the pseudoparabolic equation with a changing time direction // Missouri Journal of Mathematical Sci. 32(1): 49-60 (May 2020).

[3] Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш. Внутренняя краевая задача для системы уравнений в частных производных смешанного типа // Проблемы вычислительной и прикладной математики», Спецвыпуск №6/1(37). Ташкент- 2021. С.- 29-43.

УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

¹Фаязов К.С., ²Худайбергганов Я.К.

¹Туринский политехнический университет в городе Ташкенте

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: kudratillo52@mail.ru, komilyashin@mail.ru

В работе исследуется начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа с двумя линиями вырождения. Один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, который интенсивно развивается, это теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Большой интерес к таким задачам связан с теоретической значимостью получаемых результатов, и их важными практическими приложениями. Толчок к развитию этого направления науки дали многочисленные приложения в газовой динамике, в магнитной гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибов поверхностей, в теории оболочек, в прогнозировании уровня грунтовых вод и другие задачи приложения, техники и естествознания (см. Л. Берс [1], А.Г.Кузьмин [2], Ф. И. Франкль [3]).

Корректно поставленные краевые задачи для этих типов уравнений были рассмотрены рядом ученых. В частности, работы Ф. Трикоми и С. Геллерстедта были посвящены уравнениям смешанного типа. Сюда можно отнести и работы М.А. Лаврентьева, М.В. Келдыша, А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, В.Н. Врагова, К.Б. Сабитова, А.И. Кожанова, С.П. Пулькина, А.П. Солдатов, Н.В. Кислова и др. Краевыми задачами для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения занимались А.М. Нахушев, М.М. Зайнулабидов, В.Ф. Волкодав, В.В. Азовский, О.И. Маричев, А.М. Ежов, Н.И. Поливанов, Хе Кан Чер, С. И. Макаров, С.С. Исамухамедов, Ж. Орамов, М.С. Салахитдинов с учениками, К.Б. Сабитов, А.А. Гималтдинова, О.А. Репин и другие авторы.

Некорректная задача для подобных уравнений было рассмотрена в работах Е.М. Ландиса, С.Г. Крейна, М.М. Лаврентьева [4], Н.А. Levine, И.Е. Егорова и В.Е. Федорова, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова, Н.В. Кислова, А.Л. Бухгейма, К.С. Фаязова, М.Х. Аламинова, И.О. Хажиева, З.Ш. Абдуллаева, Я.К. Худайбергана и других.

Исследования некорректных краевых задач для таких типов уравнений можно найти в работах К.С. Фаязова [5], И.О. Хажиева, З.Ш. Абдуллаева, Я.К. Худайбергана и других.

Пусть пара функций $(u_1(x, y, z, t)), u_2(x, y, z, t))$ является решением системы уравнений в частных производных смещенного типа

$$\begin{cases} u_{1tt} + \operatorname{sgn}(x)u_{1xx} + \operatorname{sgn}(y)u_{1yy} + u_{1zz} + a_1u_1 + b_1u_2 = f_1, \\ u_{2tt} + \operatorname{sgn}(x)u_{2xx} + \operatorname{sgn}(y)u_{2yy} + u_{2zz} + a_2u_2 + b_2u_1 = f_2, \end{cases} \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$ где $\Omega_0 = \{x, y, z \mid (-1; 1)^2 \times (0; \pi), x \neq 0, y \neq 0\}$,

$Q = (0; T), T < \infty$, a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые константы, $b_2 \neq 0$, $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2 > 0$ и $f_j(x, y, z, t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача. Ищется решения уравнения (1) удовлетворяющая следующим условиям:

начальным

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^i u_1(x, y, z, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} &= \varphi_i(x, y, z), \quad (x, y, z) \in [-1; 1]^2 \times [0; \pi], \\ \left. \frac{\partial^i u_2(x, y, z, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} &= \psi_i(x, y, z), \quad (x, y, z) \in [-1; 1]^2 \times [0; \pi], i = 0, 1, \end{aligned} \quad (2)$$

граничным

$$\begin{aligned} u_j(x, y, z, t) \Big|_{\substack{x=-1 \\ x=+1}} &= 0, \quad (y, z, t) \in [-1; 1] \times [0; \pi] \times \bar{Q}, \\ u_j(x, y, z, t) \Big|_{\substack{y=-1 \\ y=+1}} &= 0, \quad (x, t) \in [-1; 1] \times [0; \pi] \times \bar{Q}, \\ u_j(x, y, z, t) \Big|_{\substack{z=0 \\ z=\pi}} &= 0, \quad (y, z, t) \in [-1; 1]^2 \times \bar{Q}, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условиям склеивания

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial x^i} \right|_{x=-0} &= \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial x^i} \right|_{x=+0}, \quad (y, z, t) \in [-1; 1] \times [0; \pi] \times \bar{Q}, \\ \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial y^i} \right|_{y=-0} &= \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, z, t)}{\partial y^i} \right|_{y=+0}, \quad (x, z, t) \in [-1; 1] \times [0; \pi] \times \bar{Q}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(i = \overline{0,1}, j = \overline{1,2})$ и $\varphi_i(x, y, z), \psi_i(x, y, z)$ – заданные достаточно гладкие функции.

В данной работе доказана некорректность искомой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, Москва, 1961, 206 с.

[2] Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения в газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990, 280 с.

[3] Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. ГЛ.: Наука, 1973, 711 с.

[4] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010, 941 с.

[5] Фаязов К. С., Худайбергенов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирские электронные математические известия. 17 (2020), с. 647–660

ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Фаязова З. К.

Ташкентский международный Университет Кимё

e-mail: z.fayazova@yahoo.com

В последнее время при математическом моделировании задач приложения часто стали использовать дифференциальные уравнения дробного порядка. Геометрическую интерпретацию дробного интеграла и производной можно найти в [1]. Большинство исследователей применяют определения дробного производного в смысле Римана-Лиувилля и Капуто.

В дальнейшем мы используем следующее:

через

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

где $\alpha > 0$ и $f: (0, \infty) \rightarrow R$ дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля; через

$${}^{RL}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

где $n = [\alpha] + 1$, здесь $[\alpha]$ целая часть от α , дробную производную в смысле Римана-Лиувилля;

через

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau$$

дробный интеграл в смысле Капуто.

Пусть функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} D_t^\alpha (u - \Delta u) &= \Delta u, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ (x, y, t) \in D_t &= \{0 < t < T, -\pi < x, y < \pi\} \end{aligned} \quad (1)$$

начальному

$$u|_{t=0} = 0, \quad -\pi \leq x, y \leq \pi \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{x=-\pi} = \mu(t)\Phi(y), \quad 0 \leq t \leq T, -\pi \leq y \leq \pi; \\ u|_{y=-\pi} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, -\pi \leq x \leq \pi; \\ \Phi(-\pi) = \Phi(\pi) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Определение. Управление $\mu(t)$ называется допустимым, если функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию $|\mu(t)| \leq 1$.

Задача. Для заданного среднего значения решения $\theta(t)$ найти допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее следующее равенство

$$\int_{-\pi}^0 \int_{-\pi}^0 u(x, y, t) dx dy = \theta(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

Теорема. Пусть неотрицательная функция $\Phi(y)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет третью кусочно-непрерывную производную и убывает на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда существует постоянная $M > 0$ такая, что для любой функции $\theta(t) \in W_2^1(-\infty, +\infty)$ такой, что $\theta(t) = 0$ при $t \leq 0$, существует допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение условия (4).

Литература.

[1] Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. // Fractional Calculus and Applied Analysis 5(4) (2002). P. 367-386.

[2] Kilbas A. A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. // Elsevier, vol. 204, 2006.

[3] Тихонов А. Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. // Москва, Наука, 1979. С. 288.

[4] Фаязова З.К. «Граничное управление процессом теплообмена в пространстве», Известия Вузов, Математика, 2019, № 12. С. 82-90.

[5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, "Наука", Москва, 1967. С. 736.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

^{1,2}*Хажиев И.О., ¹Рузматова Х.У.*

¹*Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

²*Туринский политехнический университет в г. Ташкенте*

e-mail: kh.ikrom04@gmail.com, husniyaruzmatova98@gmail.com

Рассматривается начально-краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с одной линией вырождения. Особенность этой задачи заключается в отсутствие непрерывной зависимости решения от данных.

Пусть $Q = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega, 0 < t < T\}$, где $\Omega = \{-\pi < x < \pi, 0 < y < \pi\}$, $T < \infty$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$u_{tt} + a \cdot \operatorname{sgn}(x)u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = 0 \quad (1)$$

в области $Q \cap \{x \neq 0\}$, где a, b, c - некоторые константы, $a \neq 0, b \neq 0$.

Постановки задачи. Найти функцию $u(x, y, t)$ решение уравнения (1) в области $Q \cap \{x \neq 0\}$ и удовлетворяющее условиям: начальным

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), u_t|_{t=0} = \psi(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

граничным

$$\begin{aligned} u|_{x=-\pi} &= u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq t \leq T, \\ u|_{y=0} &= u|_{y=\pi} = 0, -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условиям склеивания

$$u|_{x=0-} = u|_{x=0+}, u_x|_{x=0-} = u_x|_{x=0+}, \quad (4)$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ достаточно гладкие функции, причем $\varphi(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$, $\psi(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$.

Определение. Под решением задачи (1)–(4) понимаем функцию, имеющую непрерывные производные, участвующие в уравнении, и удовлетворяющую уравнение (1) в области $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ при условиях (2)–(4).

Лемма 1. Пусть $u(x, y, t)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям $u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда при любом $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\int_{\Omega} u_x^2(x, y, t) dx dy \leq 4\pi^2 \left(\int_{\Omega} u_x^2|_{t=0} dx dy + |\alpha| \right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\int_{\Omega} u_x^2|_{t=T} dx dy + |\alpha| \right)^{\frac{t}{T}} e^{2t(T-t)} - |\alpha|,$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(a \operatorname{sgn} x u_{xx}^2 + b u_{xx} u_{yy} + c u_{xx} u - u_{xt}^2 \right) \Big|_{t=0} dx dy$.

Определим множества корректности M следующим образом

$$M = \left\{ u : \|u(x, y, T)\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \leq m \right\}.$$

Теорема 1. Пусть решение задачи существует и $u(x, y, t) \in M$, тогда решение задачи (1) - (4) единственно.

Пусть $u_{\varepsilon}(x, y, t)$ решение задачи (1)-(4) с приближенными данными.

Теорема 2. Пусть решения задачи (1)-(4) существует, $u, u_{\varepsilon} \in M$, и пусть $\|\varphi(x, y) - \varphi_{\varepsilon}(x, y)\|_{W_2^{2,2}(Q)} \leq \varepsilon$, $\|\psi(x, y) - \psi_{\varepsilon}(x, y)\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq \varepsilon$. Тогда для решения задачи (1) - (4) верна оценка

$$\int_{\Omega} (u - u_{\varepsilon})^2 dx dy \leq 4\pi^2 (\varepsilon^2 + \alpha_{\varepsilon})^{1-t/T} (4m^2 + \alpha_{\varepsilon})^{t/T}$$

где $\alpha_{\varepsilon} = \frac{1}{2} (|a| + |b| + |c| + 1) \varepsilon^2$.

Так как задача (1)-(4) условно-корректно и множества M компактны, то согласно идеи А.Н. Тихонова можно построить приближенное решение, которое не выводит решение за пределы множества M и сходятся к точному решению.

В данной статье построено приближенное решение задачи (1)-(4) с использованием метода регуляризации Тихонова. Для расчета параметра регуляризации получена оценка эффективности разности точного и приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Levine H. A., Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second Order Differential Inequalities // Journal of Differential Equations, 8, 34-55 (1970).

[2] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. - 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. - 912 с.

[3] Пятков С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения, Некоторые приложения функций анализа к задачам матем. физики. Новосибирск: Инст. матем. СО АН СССР. 1986. С. 65-84.

[4] Фаязов К.С., Хажиев И.О., Условная корректность краевой задачи для составного дифференциального уравнения четвертого порядка, Изв. вузов. Матем., 2015, 4. С. 65–74

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Хайдаров А, Рустамов Ш.А.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

e-mail: rustamovsaxzod1997@gmail.com

Пусть x точка $(x_1, \dots, x_n)$ пространства R^n , x' проекция $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ этой точки на гиперплоскость $x_n = 0$. Через $C^{k+\lambda}(\bar{D})$ обозначается пространство функций u на D с конечной нормой $|u|^{k+\lambda}(D)$.

Рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$A = - \sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n a^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + a(x)$$

с коэффициентами a^{jk}, a^j, a класса $C^\lambda(R^n)$ удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^n a^{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \varepsilon_0 |\xi|^2, \quad \xi \in R^n, \quad x \in D.$$

Рассмотрим область D' в R^{n-1} с границей D' класса $C^{2+\lambda}$. Пусть

$$D = \{x: x' \in D', \gamma_H(x') < x_n < \gamma_0(x')\},$$

где γ_0, γ_H — функции класса $C^{2+\lambda}(\bar{D}')$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\gamma_H < \gamma_0 \quad \text{на } D', \quad \partial \gamma_\tau / \partial x_j = 0 \quad (\tau = 0, H), \quad j = 1, \dots, n-1$$

Обозначим через Γ_0 часть ∂D , являющуюся графиком γ_0 . Зафиксируем весовую функцию ρ , такую, что

$$0 < \varepsilon_0 < \rho \quad \text{на } \Gamma_0, \quad |\rho|^\lambda(D) \leq 1/\varepsilon_0.$$

Рассмотрим задачу об отыскании пары функций (u, q) удовлетворяющих условиям:

$$Au = \rho q + f, \quad q_{x_n} = 0 \quad \text{на } D, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{на } \partial D, \quad u_{x_n} = h \quad \text{на } \Gamma_0. \tag{2}$$

Через C обозначаются постоянные, зависящие от D , от C^λ — норм коэффициентов оператор A , функции ρ и от ε_0 .

В теореме 1 предполагается, что коэффициенты a^{jn} при $j \leq n-1$ удовлетворяют следующим условиям в угловых точках границы D :

$$a^{jn}(x', \gamma_\tau(x')) = 0 \quad \text{на } \partial D' \quad \text{для } \tau = 0, H.$$

Теорема 1. Существует постоянная C , такая что

$$\begin{aligned} & |u|^{2+\lambda}(D) + |q|^\lambda(D') \leq \\ & \leq C(|f|^\lambda(D) + |q|^{2+\lambda}(\partial D) + |h|^{1+\lambda}(\Gamma_0) + |u|^0(D)) \end{aligned}$$

для любых функций $u \in C^{2+\lambda}(\bar{D})$ и $q \in C^\lambda(\bar{D})$ являющихся решением задач (1), (2).

Теорема 2. Предположим, что весовая функция ρ удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho, \partial \rho / \partial x_n \in C(\bar{D}), \quad 0 \leq \rho, \quad 0 \leq \partial \rho / \partial x_n \quad \text{на } D.$$

Если функции $u \in C^2(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D})$, $q \in C(\bar{D})$ являются решениями задачи

$$\begin{aligned} Au &= \rho q, & \partial q / \partial x_n &= 0 \text{ на } D, \\ u &= 0 \text{ на } \partial D, & \partial u / \partial x_n &= 0 \text{ на } \Gamma_0 \end{aligned}$$

то $u = 0$, $q = 0$ на D .

Оценка теоремы 1 является оценкой шаудеровского типа для задачи (1), (2). Из теоремы 2 можно получить единственность решения задачи (1), (2). Тогда оценки теоремы 1 справедливы без слагаемого $|u|^0(D)$ в правой части.

Рассмотрим задачу определения пары функций (u, q) из условия

$$Au + qu = 0, \quad q_{x_n} = 0, \quad q \geq 0 \text{ на } D, \quad (3)$$

$$u = q \text{ на } \partial D, \quad u_{x_n} = h \text{ на } \Gamma_0. \quad (4)$$

Теорема 3. При условий теорем 1 и 2 вытекает, что решение задачи (3), (4) единственно и устойчиво.

В работе [1] рассмотрен частный случай задачи (1), (2), где область

$$D = D'x(-H, 0)$$

и получен оценки теоремы 1 и единственность.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Хайдаров. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. № 7, том 3. 1987.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Хайруллаев И. Н.

Термезский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан

e-mail: xayrullayev0809@mail.ru

Рассмотрим однородную систему линейных частично-интегральных уравнений вида

$$(1) \begin{cases} f_0 + \lambda_1 \int_a^b a_1(t) f_1(t) dt = 0 \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x) \int_a^b a_2(t) f_1(t) dt + \lambda_3 a_3(x) \int_a^b a_3(t) f_2(x, t) dt = 0 \\ f_1(x) + f_2(x, y) + \lambda_4 a_4(x) \int_a^b a_4(t) f_2(t, y) dt + \lambda_5 a_5(y) \int_a^b a_5(t) f_2(x, t) dt = 0 \end{cases}$$

где функции $a_j(\cdot)$, $j = \overline{1, 5}$ принадлежат пространству $L_2[a, b]$ $f_0 \in C^1$, λ_i , $i = \overline{1, 5}$ - числовые параметры;

$f_2(x, y) \in L_2([a, b]^2)$, $f_1(x) \in L_2[a, b]$ искомые функции.

В этой заметке изучена разрешимость однородной системы (1) при всех значениях параметров λ_i , $i = \overline{1, 5}$ кроме случая $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, 5}$

Всюду в дальнейшем интеграл понимается по отрезку $[a, b]$.

Основными результатами являются следующие.

Пусть детерминанты $D_1(\lambda_1) = 1 + \lambda_1 \int_a^b a_1^2(t) dt$ Фредгольма ядра $a_1(t)$ [1]

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, тогда

а) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то однородная система имеет решение

$$f_0 = f_0, f_1(x) = f_2(x, y) = f_0, f_0 \in C^1, f_0 \neq 0$$

$D_2(\lambda_2) = 1 + \lambda_2 \int a_2^2(t)dt$ детерминант Фредгольма ядро $K(x, t) = a_2(x)a_2(t)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Тогда:

а) если $D_2(\lambda_2) = 0$ то однородная система (1) имеет решение вида

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ca_2(x) \\ -ca_2(x) \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$ то система имеет только нулевое решение.

Аналогичные результаты как в теореме (2) получено и в случаях:

1) $\lambda_3 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 4, 5$;

2) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, 5$;

3) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$;

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ и тогда:

а) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$ имеет решение вида $f_0 = 0, f_1(x) = -\lambda_2 ca_2(x), f_2(x, y) = \lambda_2 ca_2(x)$ где c – произвольная постоянная,

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0 = A(a_1, a_2), f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x), f_2(x, y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$$

где $A(a_1, a_2) = \frac{c\lambda_1\lambda_2 \int a_1(t)a_2(t)dt}{D_1(\lambda_1)} = c' \cdot c_1, c_2, c'$ постоянные.

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$ система (1) имеет решение вида

$$f_0 = c_1, f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x), f_2(x, y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$$

где c_1, c_2 – константы;

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0 = c_2, f_1(x) = -c_2 - ca_2(x), f_2(x, y) = c_2 + ca_2(x)$$

где c – постоянная.

Отметим, что в случаях когда двое из параметров отличны от нуля, а остальные равны нулю имеют аналогичные теоремы.

Теперь пусть $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \int [\sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k^2(t)]dt$ детерминант Фредгольма ядро $k(x, t) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k(x)a_k(t)$.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ Тогда:

а) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, то система (1) имеет решение вида

$$f_0 = \lambda \sum_{k=1}^3 c_k \lambda_k^2 \int a_k^2(t) dt = c, f_1(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i a_i(x), f_2(x, y) = - \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i a_i(x)$$

б) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и при остальных случаях когда трое из параметров отличны от нуля и остальные равны нулю.

Литературы

[1] Смирнов В.И. “Курс высшей математики” Т.4., Часть I., М. “Наука”, 1974 С.253-290

[2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. М.: Мир. 1977, 1, Функциональный анализ. С.211-218

[3] Хайруллаев И.Н. Некоторые частично-интегральные операторы и их спектральные свойства //Кандидатская диссертационная работа. Ташкент, 2001.С.59-66

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНУС-ГОРДОНА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНАМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов А. Б., Нормуродов Х. Н., Рахматуллаева Н. Ш.
Самаркандский государственный университет, г. Самарканд
(Узбекистан)

e-mail: ahasanov2002@mail.ru, normurodov.96@bk.ru,
nozima.raxmatullayeva@mail.ru.

1. Постановка задача

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона вида

$$q_{xt} = a(t)chq - b(t)q_{xx}, \quad q = q(x, t), \quad x \in R, t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R) \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π - периодических по x функций:

$$q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad q(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $a(t), b(t) \in C([0, \infty))$ -заданные непрерывные ограниченные функции.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x, t)$, $x \in R, t > 0$, задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, t > 0, \tau \in R \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} q'_x(x, t) \\ \frac{1}{2} q'_x(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Эволюция спектральных данных

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4). Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z \setminus \{0\}$, называются лакунами, где λ_n , корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической ($y(0) = \pm y(\pi)$) задачи для уравнения (4). Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Числа $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau, t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$. Задача восстановления коэффициента Ω оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Далее с помощью начальной функции $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau, 0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in Z \setminus \{0\}\}$ оператора $L(\tau, 0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$, оператора $L(\tau, t)$, удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина:

$$1. \quad \frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} = 0, \quad n \in Z \setminus \{0\}; \quad (5)$$

$$2. \quad \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in Z \setminus \{0\}. \quad (6)$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \setminus \{0\} \quad (7)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Последовательность $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ участвующая в уравнении (6) определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}, \quad g_n(\xi) = \frac{a(t)e^{\{q(\tau, t)\}}}{4\xi_n(\tau, t)} + b(t)\xi_n(\tau, t)$$

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in Z \setminus \{0\}$$

систему дифференциальных уравнения Дубровина (6) и начальные условия (7) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K :

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t)|_{t=0} = x^0(\tau) \in K \quad (8)$$

где

$$K = \left\{ x(\tau, t) = (... , x_{-1}(\tau, t), x_1(\tau, t), ...) : \|x(\tau, t)\| = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (1 + |n|)(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})|x_n(\tau, t)| < \infty \right\}$$

$$H(x) = (... , \overset{*}{H}_{-1}(x), H_1(x), ...),$$

$$H_n(x) = (-1)^n \sigma_n(0) \cdot g_n(... , \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), ...) \times$$

$$\times f_n(... , \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), ...) = (-1)^n \sigma_n(0) f_n(x(\tau, t)) g_n(x(\tau, t)).$$

Известно, что если $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R)$, то $(q_0(x))' \in C^2(R)$. Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau, 0)$, имеет место равенство (см. [6], стр. 98):

$$\gamma_k \equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^2|}{2|k|^2} + \frac{\delta_k}{|k|^3}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_{2k}, \lambda_{2k-1} = k + \sum_{j=1}^3 c_j k^{-j} \pm 2^{-2} |k|^{-2} |q_{2k}^2| + |k|^{-3} \varepsilon_k^{\pm}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |q_{2k}^2|^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_k^{\pm})^2 < \infty, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-.$$

Лемма 1. Если $q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau, t))$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau, t), y(\tau, t) \in K$ выполняется следующее неравенство

$$\|H(x(\tau, t)) - H(y(\tau, t))\| \leq L \|x(\tau, t) - y(\tau, t)\|,$$

где

$$L = C \sum_{\substack{n=-\infty, \\ n \neq 0}}^{\infty} |n| \gamma_n < \infty. \quad (10)$$

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 1 дает метод решения задачи (1)-(3).

Теорема 2. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^3(R),$$

то существует единственное решение $q'_x(x, t)$, $x \in R, t > 0$ задачи (1)-(3):

$$q'_t(\tau, t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \quad (11)$$

Список литературы

- [1] Жибер А.В., Муртозина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. Характеристические кольцо Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. Москва, Ижевск, 2012.
- [2] Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений «Sin-Gordon» уравнения. // Докл. АН СССР. 1974. т. 219, №6, с.1334-1337.
- [3] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Sugar H. Method for solving the sine-Gordon equation // Phys. Rev.Lett. 1973. v.30, №25, p.1262-1264.
- [4] Ince E.L. Ordinary Differential Equations. New York: Dover, 1956.
- [5] Джаков П.Б., Митягин Б.С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака. // УМН. 2006, т.61, №4(370), стр. 77-182.
- [6] Мисюра Т.В. Характеристика спектров периодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1978. т.30 с.90-101.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Т. Г.

Ургенчский государственный университет, г. Ургенч (Узбекистан)

e-mail: temur.xasanov.2018@mail.ru.

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида:

$$u_t + \beta(t)u(x_0, t)(u_{xxx} - 6uu_x) + \gamma(t)u(x_1, t)u_x = 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \eta, t) \varphi(x, -\eta, t) d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\varphi = \eta^2 \varphi \quad (2)$$

где

$$u = u(x, t), \quad L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$$

и $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0, x_1 \in R$. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии.

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R \quad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующим свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty; \quad (4)$$

2) оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x)$, $x \in R$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi(x, \eta, t)$ - решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\varphi(x, \eta, t) = h(\eta, t) e^{-i\eta x}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $h(\eta, t)$ - изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta, t) h(-\eta, t) d\eta < \infty \quad (6)$$

при всех неотрицательных значения t .

Пусть функции $u(x, t)$ и $\varphi(x, \eta, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 + |x|) |u(x, t)| + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^3} \right| \right] dx < \infty, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\varphi(x, \eta, t)|^2 + |\varphi(x, -\eta, t)|^2 + \left| \frac{\partial \varphi(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\eta < \infty. \quad (8)$$

Основная цель данной работы- получить представления для решения $u(x, t)$, $\varphi(x, \eta, t)$ задачи (1)-(8) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1: Если функции $u(x, t)$, $\varphi(x, \eta, t)$, $m = \overline{1, N}$, $x \in R$, $t > 0$ является решением задачи (1)-(8), то данные рассеяния

$\{r^+(k, t), \lambda_n(t), B_n(t), n = \overline{1, N}\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dr^+(k, t)}{dt} = \left(8ik^3\beta(t)u(x_0, t) - 2ik\gamma(t)u(x_1, t) - 2iV.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\eta)|^2}{\eta - k} d\eta - 2\pi|h(k)|^2 \right) r^+(k, t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = \left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0, t) + 2\chi_n\gamma(t)u(x_1, t) - \frac{\chi_n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(\eta)|^2}{\eta^2 + \chi_n^2} d\eta \right) B_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(8).

Пусть задана функция $u_0(x)(1 + |x|) \in L^1(R)$. Тогда решение задачи (1)-(8) находится с помощью следующего алгоритма.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\{r^+(k), \chi_n, B_n, n = \overline{1, N}\}$ для оператора $L(0)$.
- Используя теорему 1, находим данные рассеяния для $t > 0$
 $\{r^+(k, t), \chi_n(t), B_n(t), n = \overline{1, N}\}$.
- Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x, t)$ из данных рассеяния для $t > 0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi(x, \eta, t)$ уравнения
 $L(t)\varphi_m(x, \eta, t) := -\varphi_m''(x, \eta, t) + u(x, t)\varphi_m(x, \eta, t) = \lambda_m\varphi_m(x, \eta, t), \quad m = 1, 2, \dots, N.$

Список Литературы

- [1] У. А. Хоитметов, Т. Г. Хасанов. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 1–15.
- [2] Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).
- [3] Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. Proceeding of the Institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan. Vol., 47, №2, 2021, p. 250-261.

[4] Хоитметов У.А. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Математические труды. т. 24, №2, стр. 181-198 (2021).

О НАХОЖДЕНИИ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ РЕШЕНИЙ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОН

Хоитметов У.А.

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: x_umid@mail.ru

Уравнение синус-Гордон

$$u_{xt} = \sin u,$$

является одним из классических полностью интегрируемых нелинейных уравнений, наряду с уравнением Кортевега-де Фриза, модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза, нелинейным уравнением Шредингера уравнение и др. Это уравнение имеет многочисленные приложения в дифференциальной геометрии, распространении деформаций вдоль двойной спирали ДНК и многих других.

В данной работе рассматривается следующее уравнение

$$u_{xt} = \alpha(t)u(x_0, t)\sin u + \beta(t)u(x_1, t)u_{xx}, \quad (1)$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1) \quad u_0(x) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u'_0(x)| + |u''_0(x)|) dx < \infty. \quad (3)$$

$$2) \quad \text{Оператор } L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{u_x(x, 0)}{2} \\ \frac{u_x(x, 0)}{2} & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \text{ не имеет спектральных}$$

особенностей и имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости.

Предположим, что функция $u(x, t)$ имеет достаточную гладкость и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$u(x, t) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u_x(x, t)| + |u_{xx}(x, t)|) dx < \infty. \quad (4)$$

Основная цель настоящей работы – получить представление решения $u(x, t)$ задачи (1)-(4) в рамках метода обратной задачи для оператора

$$L(t) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & \frac{u_x(x, t)}{2} \\ \frac{u_x(x, t)}{2} & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Обратная задача рассеяния для оператора $L(t)$ на всей оси изучалась в [3, 4].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)-(4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ изменяются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(2i\xi \beta(t)u(x_1, t) - \frac{i\alpha(t)u(x_0, t)}{2\xi} \right) r^+, \quad (\text{Im} \xi = 0)$$

$$m_n(t) = m_n(0), \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = i \left(2\xi_n \beta(t)u(x_1, t) - \frac{\alpha(t)u(x_0, t)}{2\xi_n} \right) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = i \left(2\beta(t)u(x_1, t) + \frac{\alpha(t)u(x_0, t)}{2\xi_n^2} \right) \chi_0^n + i \left(2\xi_n \beta(t)u(x_1, t) - \frac{\alpha(t)u(x_0, t)}{2\xi_n} \right) \chi_1^n,$$

$$\frac{d\chi_{m_n-1-\nu}^n}{dt} = 2i\xi_n \beta(t)u(x_1, t)\chi_{m_n-1-\nu}^n + 2i\beta(t)u(x_1, t)\chi_{m_n-2-\nu}^n$$

$$-i \sum_{s=\nu}^{m_n-1} \frac{(-1)^{m_n-1-s} \alpha(t)u(x_0, t)}{2\xi_n^{m_n-s}} \chi_{s-\nu}^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad \nu = m_n - 1, m_n - 2, \dots, 0.$$

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$u_{xt} = \frac{u(0, t)}{2 \arctg(e^{-(\pi+1)t})} \sin u + \frac{\pi u(\pi, t)}{8 \arctg(e^{-\pi(t+2)-t})} u_{xx},$$

$$u(x, 0) = 4 \arctg(e^{-2x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

В этом случае решение этой задачи имеет следующий вид:

$$u(x, t) = 4 \arctg(e^{-2x - (\pi+1)t}).$$

Литература

- [1] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Method for solving the sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett. 1973, vol. 30, pp. 1262–1264.
- [2] Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения, ДАН СССР, 1974, 219:6, С. 1334–1337.
- [3] Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 1972, 207:1, С. 44–47.
- [4] Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка, ДАН СССР, 1984, 277:3, С. 559–562.

[5] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения, Дифф. ур., 1983, 19:1, С. 86–94.

[6]. Hoitmetov U.A. Integration of the Sine-Gordon Equation with Variable Time-Dependent Coefficients and Additional Terms, Bulletin of the Institute of Mathematics, 2022, Vol. 5, no. 5, pp. 21-35.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ-СИНУС-ГОРДОН С ИСТОЧНИКОМ

Хоитметов У.А.

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: x_umid@mail.ru

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$u_{xt} + \alpha(t)u(x_0, t) \left(\frac{3}{2} u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} \right) = \beta(t)u(x_1, t) \sin u + \gamma(t)u(x_2, t)u_{xx} + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \left(f_{k1}^j f_{k1}^{m_k-1-j} - f_{k2}^j f_{k2}^{m_k-1-j} \right), \quad (1)$$

$$L(t) f_k^j = \xi_k f_k^j + j f_k^{j-1}, \quad \operatorname{Im} \xi_k > 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (2)$$

где $C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!!}$, $L(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$, $u_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4},$$

а $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ – изначально заданные непрерывно дифференцируемые функции. Система уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$u_0(x) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u_0'(x)| + |u_0''(x)| + |u_0'''(x)| + |u_0''''(x)|) dx < \infty. \quad (4)$$

$$2) \quad \text{Оператор} \quad L(0) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x(x, 0)}{2} \sigma_2 + \frac{u_x(x, 0)}{2} \sigma_3, \quad \text{не имеет}$$

спектральных особенностей и имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости.

Предполагается, что вектор-функции $f_k^j = (f_{k1}^j(x, t), f_{k2}^j(x, t))^T$ нормированы условиями

$$\frac{1}{(m_k - 1 - s)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{k1}^{m_k-1} f_{k2}^{m_k-1-s} + f_{k2}^{m_k-1} f_{k1}^{m_k-1-s} \right) dx = A_{m_k-1-s}^k(t), \quad (5)$$

где $A_{m_k-1-s}^k(t)$ – изначально заданные непрерывные функции от t ($t \geq 0$), $k = 1, 2, \dots, N$, $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$.

Пусть функция $u(x, t)$ имеет достаточную гладкость и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$u(x, t) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u_x(x, t)| + \sum_{j=2}^4 \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty. \quad (6)$$

Основная цель настоящей работы – получить представление решения $u(x, t)$, $f_k^j(x, t)$, $k = \overline{1, N}$, $j = 0, 1, \dots, m_k - 1$ задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи для оператора $L(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x(x, t)}{2} \sigma_2 + \frac{u_x(x, t)}{2} \sigma_3$. Обратная задача рассеяния для оператора $L(t)$ на всей оси изучалась в [3, 4].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(x, t)$, $f_k^j(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, m_k - 1$ являются решением задачи (1)–(6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ меняются по t следующим образом:

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(8i\xi^3 \alpha(t) u(x_0, t) - \frac{i\beta(t) u(x_1, t)}{2\xi} + 2i\xi \gamma(t) u(x_2, t) \right) r^+, \quad \text{Im } \xi = 0,$$

$$m_n(t) = m_n(0), \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_{m_n-1-\nu}^n}{dt} = & \left(8i\xi_n^3 \alpha(t) u(x_0, t) + 2i\xi_n \gamma(t) u(x_2, t) \right) \chi_{m_n-1-\nu}^n + 8i\alpha(t) u(x_0, t) \chi_{m_n-4-\nu}^n + \\ & + \left(24i\xi_n^2 \alpha(t) u(x_0, t) + 2i\gamma(t) u(x_2, t) \right) \chi_{m_n-2-\nu}^n + 24i\xi_n \alpha(t) u(x_0, t) \chi_{m_n-3-\nu}^n + \\ & - \sum_{s=\nu}^{m_n-1} \left(\frac{(-1)^{m_n-1-s} i\beta(t) u(x_1, t)}{2\xi_n^{m_n-s}} + \frac{1}{2} A_{m_n-1-s}^n(t) \right) \chi_{s-\nu}^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad \nu = m_n - 1, m_n - 2, \dots, 0. \end{aligned}$$

Полученные равенства позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(6).

Пример. Рассмотрим следующую конкретную задачу

$$u_{xt} + \alpha(t) u(0, t) \left(\frac{3}{2} u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} \right) = \beta(t) u(-\ln 2, t) \sin u + \gamma(t) u(\ln 2, t) u_{xx} + f_{11}^2 - f_{12}^2,$$

$$Lf_1 = \xi_1 f_1,$$

$$u(x, 0) = 4 \arctan(e^{-2x}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь

$$\alpha(t) = \frac{1}{4 \arctan\left(\frac{1}{t+1}\right)}, \beta(t) = \frac{(4 - (t+1)^2)}{8 \arctan\left(\frac{4}{t+1}\right)}, \gamma(t) = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{4t+4}\right)}, A_0(t) = -\frac{t+1}{2}.$$

В этом случае решение этой задачи имеет следующий вид:

$$u(x, t) = 4 \arctan\left(\frac{e^{-2x}}{t+1}\right); \quad f_{11} = -\frac{(t+1)e^{-3x}}{(t+1)^2 + e^{-4x}}, \quad f_{12} = \frac{(t+1)^2 e^{-x}}{(t+1)^2 + e^{-4x}}.$$

Литература

- [1] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. Method for solving the sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett. 1973, vol. 30, pp. 1262–1264.
- [2] Wazwaz A.M. N-soliton solutions for the integrable modified KdV–sine-Gordon equation. Phys. Scr., 2014, 89, 065805.
- [3] Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 1972, 207:1, С. 44–47.
- [4] Хасанов А.Б. Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка, ДАН СССР, 1984, 277:3, С. 559–562.
- [5] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения, Дифф. ур., 1983, 19:1, С. 86–94.
- [6] Hoitmetov U.A. On the Cauchy Problem for the mKdV–Sine-Gordon Equation with an Additional Term. Acta Appl. Math. 2023, 184, 7.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ.

Хоитметов У.А., Собиров Ш.К.

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан
e-mail: x_umid@mail.ru, shexzod1994@mail.ru.

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$u_t + \beta(t)u(x_0, t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + \gamma(t)u(x_1, t)u_x = i \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_1^2 - \phi_2^2) d\eta, \quad (1)$$

$$L(t)\phi = \eta\phi, \quad x \in R,$$

где $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где $\phi = (\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t))^T$ обладает следующей асимптотикой

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} h(\eta, t)e^{-i\eta x} \\ h(\eta, t)e^{i\eta x} \end{pmatrix} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (3)$$

Здесь $h(\eta, t) = h(-\eta, t)$ непрерывная функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\eta, t)|^2 d\eta < \infty \quad \text{при } t \geq 0. \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty. \quad (5)$$

$$2) \quad \text{Оператор } L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix} \text{ в верхней полуплоскости комплексной}$$

плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Предположим, что функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u(x, t)| + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Основная цель данной работы – получить представления для решений $u(x, t), \phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$ задачи (1)–(6) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Если функции $u(x, t), \phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t)$ является решением задачи (1)–(6), то данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$r_t^+ = \left(8i\xi^3 \beta(t) u(x_0, t) - 2i\xi \gamma(t) u(x_1, t) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{\eta + \xi} d\eta - 2i\pi h^2(\xi, t) \right) r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0).$$

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 \beta(t) u(x_0, t) - 2i\xi_n \gamma(t) u(x_1, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = \left(8i\xi_n^3 \beta(t) u(x_0, t) - 2i\xi_n \beta(t) u(x_1, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)(1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n +$$

$$+ \left(24i\xi_n^2 \beta(t) u(x_0, t) - 2i\gamma(t) u(x_1, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta, t)}{(\eta + \xi_n)^2 (1 + r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi_2^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_2^n + \\
&+ \left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t) - 2i\gamma(t)u(x_1,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n + \\
&+ \left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \\
\frac{d\chi_3^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_3^n + \\
&+ \left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t) - 2i\gamma(t)u(x_1,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_2^n + \\
&+ \left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_1^n + \\
&+ \left(8i\beta(t)u(x_0,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^4(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_0^n, \\
\frac{d\chi_l^n}{dt} &= \left(8i\xi_n^3\beta(t)u(x_0,t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_l^n + \\
&+ \left(24i\xi_n^2\beta(t)u(x_0,t) - 2i\xi_n\gamma(t)u(x_1,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^2(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-1}^n + \\
&+ \left(24i\xi_n\beta(t)u(x_0,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^3(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-2}^n + \\
&+ \left(8i\beta(t)u(x_0,t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^4(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_{l-3}^n + \\
&+ \sum_{s=0}^{l-4} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{l-s}h^2(\eta,t)}{(\eta + \xi_n)^{l-s+1}(1+r^+(\eta)r^+(-\eta))} d\eta \right) \chi_s^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = \overline{4, m_n - 1}.
\end{aligned}$$

Полученные равенства позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Литература

- [1] Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys. Soc. Japan. 1972, vol.32, P.1681.
- [2] Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions // Proc. Inst. Math. Mech. NAS Azer. 2021, vol.47, № 2, pp.250-261.
- [3] Khasanov A.B., Hoitmetov U.A, On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2021, pp.19–35.

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

¹Худайбергенов Я.К., ²Ешчанова О.Р

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

²Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

e-mail: komilyashin@mail.ru, eshchanovaozoda@gmail.com

Исследование некорректных краевых задач для уравнений в частных производных смешанного и смешанно-составного типа является одним из важных направлений современной теории обратных и некорректных задач. Большой вклад в исследование краевых задач для уравнений смешанного типа внесли А. И. Кожанов [1], И. Е. Егоров, С. Г. Пятков [2], А. А. Кереев, И. С. Пулькин, К. Б. Сабитов [3] и другие.

Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева [4], Н.А. Levine, С. Г Крейна, А. Л. Бухгейма, К. С. Фаязова, а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И. О. Хажиева [5], К. С. Фаязова и Я. К. Худайбергенова [6].

Из этих работ следует, что краевые задачи для уравнений смешанного типа имеют практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

Пусть пара функций $(u_1(x, y, t), u_2(x, y, t))$ является решением системы уравнений в частных производных смешанного типа

$$\begin{cases} u_{1tt} + \operatorname{sgn}(x)u_{1xx} + \operatorname{sgn}(y)u_{1yy} + a_1u_1 + b_1u_2 = 0, \\ u_{2tt} + \operatorname{sgn}(x)u_{2xx} + \operatorname{sgn}(y)u_{2yy} + a_2u_2 + b_2u_1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$ где $\Omega_0 = \{x, y | (-1; 1)^2, x \neq 0, y \neq 0\}$,

$Q = (0; T), T < \infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

начальным

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^i u_1(x, y, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} &= \varphi_i(x, y), \quad (x, y) \in [-1; 1]^2, \\ \left. \frac{\partial^i u_2(x, y, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0} &= \psi_i(x, y), \quad (x, y) \in [-1; 1]^2, i = 0, 1, \end{aligned} \quad (2)$$

граничным

$$\left. u_j(x, y, t) \right|_{\substack{x=-1 \\ x=+1}} = 0, (y, t) \in [-1; 1] \times \bar{Q},$$

$$\left. u_j(x, y, t) \right|_{\substack{y=-1 \\ y=+1}} = 0, (x, t) \in [-1; 1] \times \bar{Q}, j = 1, 2,$$
(3)

а также условиям склеивания

$$\left. \frac{\partial^i u_j(x, y, t)}{\partial x^i} \right|_{x=-0} = \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, t)}{\partial x^i} \right|_{x=+0}, (y, t) \in [-1; 1] \times \bar{Q},$$

$$\left. \frac{\partial^i u_j(x, y, t)}{\partial y^i} \right|_{y=-0} = \left. \frac{\partial^i u_j(x, y, t)}{\partial y^i} \right|_{y=+0}, (x, t) \in [-1; 1] \times \bar{Q},$$
(4)

где $(i = \overline{0, 1}, j = \overline{1, 2})$, a_1, a_2, b_1, b_2 – некоторые константы, $b_2 \neq 0$, $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2 > 0$ и $\varphi_i(x, y), \psi_i(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции.

В данной работе получена априорная оценка методом интегралов энергии, доказаны теоремы о единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности. Методами регуляризации Тихонова построены последовательности функции стремящихся в норме соответствующего пространства к точному решению искомой задачи на множестве корректности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kozhanov A.I., Composite type equations and inverse problems, inverse and ill-posed problems series. Utrecht: VSP, 1999.
- [2] Pyatkov S.G., Solvability of boundary value problems for a second-order equation of mixed type, nonclassical partial differential equations, Collect. Sci. Works, Novosibirsk, (1988), pp.77–90.
- [3] Sabitov K.B., On the theory of the Frankl problem for equations of mixed type, Izv. Math., 81:1 (2017), pp. 99–136.
- [4] Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010, 941 с.
- [5] Фаязов К. С., Хажиев И. О. Условная устойчивость краевой задачи для системы абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами. Узб. мат. журнал.2, 2017, с. 145-155.
- [6] Фаязов К. С., Худайбергганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения // Сибирские электронные математические известия. 17 (2020), с. 647–660.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Шодиев Д.С., Хайруллаев М.С.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
e-mail: dilshod.shodiev.76@mail.ru, xayrullayevmuhammad063@gmail.com*

В статье изучается задача продолжения решения задачи Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданным данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения.

Пусть G - неограниченная область в R^2 лежащая внутри полосы $0 < y_2 < h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$ граница, которой состоит из прямой $T: y_2 = 0$ и некоторой кривой $S: y_2 = F(y_1)$ удовлетворяющей условиям $0 < F(y_1) < h$, $|F'(y_1)| < M < \infty$ и $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ точки двумерного Евклидова пространства.

В области G рассмотрим бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0 \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ оператор Лапласа.

Задача. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G , т.е

$$\begin{aligned} U(y_1, y_2)|_S &= f_1(y), \quad \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_2(y), \\ \frac{\partial}{\partial n} U(y_1, y_2)|_S &= f_3(y), \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Delta U(y_1, y_2))|_S = f_4(y). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f_j(y) \in C^{4-j}(S)$, $j = 1, 2, 3, 4$ заданные функции, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G .

Рассматриваемая задача (1) - (2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных.

В работе рассматривается вопрос о приближённом решении задачи Коши для бигармонического уравнения в двумерной области специального вида и при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора была получена М.М. Лаврентьевым

[1,2]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я.Ярмухамедов [3] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области, является конической поверхностью либо гиперповерхностью.

Отметим, что при решении прикладных задач необходимо находить не только приближенные решения, но и производные приближенных решений. В работе [4,5] с помощью функции Карлемана получены оценки отклонения производных первого порядка приближённого решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы в двумерных и трёхмерных областях для уравнения Лапласа а в работе [6] в двумерных областях специального вида для бигармонического уравнения.

Литературы

[1] М.М. Лаврентьев. О Задача Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР Сер. матем., 1956, том 20, выпуск 6, с. 819-842.

[2] М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики. --Изд. СО АН СССР Новосибирск, 1962 г.

[3] Ш. Ярмухамедов. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши // Математические заметки , Том 83, выпуск 5, 2008, с. 763-778.

[4] А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Уфимский математический журнал. Том 11. №4. 2019, стр. 92-106.

[5] А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021, №2, С. 56-73.

[6] D. Shodiyev. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2022, 15(2), 199–213.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУНЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

¹Шокиров А.А., ²Джамалов С.З., ¹Халмухамедов А.Р.

¹ Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

² Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

E-mail: shokirov.abduvosiq96@gmail.com, siroj63@mail.ru

В данной статье рассмотрена полунелокальная краевая задача периодического типа для трёхмерного уравнения распространение тепла в неограниченном параллелепипеде. Хорошо известно что классические уравнения математической физики (эллиптические, гиперболические и

параболические) с нелокальными краевыми условиями имеют множество приложений в естественных науках [1],[2]. Задачи такого типа в ограниченной области достаточно хорошо изучена многими авторами [3]-[5], но в бесконечных областях для многомерных уравнений в частных производных известно мало, поэтому в данной статье рассматривается бесконечная призматическая область как модель бесконечной области. Для этого предлагается метод, который основан на сведении задачи (1)-(4) в бесконечной области к ограниченной области с помощью преобразования Фурье. При решении задачи используются сначала преобразования Фурье а потом применяется метод априорных оценок [1]-[6] и равенство Парсеваля [7].

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение распространение тепла:

$$Lu = u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t,z), \quad (1)$$

здесь $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$ - оператор Лапласа.

Пусть коэффициент уравнения (1) достаточно гладкая функция в области Q .

Полунелокальная краевая задача периодического типа.

Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_{2,x,t,z}^{2,1,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$D_x^p u|_{x=0} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0,1 \quad (3)$$

где γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\bar{Q}$. (4)

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(4) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_{2,x,t,z}^{2,1,3}(G)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(4).

Здесь через $W_{2,x,t,z}^{2,1,3}(G)$ обозначено Гильбертово пространство [7] с нормой

$$\|u\|_{W_{2,x,t,z}^{2,1,3}(G)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^3 \|\hat{u}\|_{W_{2,x,t}^{2,1}(Q)}^2 d\lambda$$

где $W_{2,x,t}^{2,1}(Q)$ пространства Соболева с нормой

$$\|\hat{u}\|_{W_{2,x,t}^{2,1}(Q)}^2 = \int_Q (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xx}^2) dQ.$$

Здесь все производные берутся в смысле обобщенной производной.

$$\hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z) e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z , функции $u(x, t, z)$.

Литература

- [1] Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. // *Монография. Ташкент. 2021г, с.176.*
- [2] Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач.-М; Наука, 1980.
- [3] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л. ЛГУ, 1950.
- [4] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М. 1973. с.407.
- [5] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [6] Лионс Ж.Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М. Мир. 1971.
- [7] Треногин. В.А. Функциональный анализ: Москва, 2007, с.488.

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТРИКОМИ И ФРАНКЛЯ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА.

Эргашева С.Б.

Термезский государственный университет

e-mail: sarvinozergasheva96@mail.ru

Постановка задачи Трикоми-Франкля (TF).

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\sigma_0(y = \sigma_0(x)): x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(sign y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0, \quad (1)$$

где m — положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через A_1 и A_2 точку пересечения характеристики AC с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $E_1(-c, 0)$ и $E_2(c, 0)$, где $0 < c < 1$. $J = (-1, 1)$ — интервал оси $y = 0$.

Задача (TF). Требуется найти в области D функцию $u(x, y) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x, y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+ ;

2) функция $u(x, y)$ является в области D^- обобщенным решением класса $R_1[1, c. 104]$ уравнения (1) ($u(x, y) \in R_1$), если в формуле Даламбера $\tau'(x)$, $v(x) \in H$ (см. ниже (8));

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in J, \quad (2)$$

причем эти приделы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{A_1 A_2} = \psi(x), \quad x \in [-(1+c)/2, -(1-c)/2], \quad (4)$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(-x)] = \rho(x), \quad x \in [-1, -c], \quad (5)$$

$$u(x, 0) - u(-x, 0) = f(x), \quad x \in [-1, -c], \quad (6)$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i \left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4} \right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0)$ – аффикс точки пересечения характеристики AC с характеристикой исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in [-1, -c]$.

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$, $f(x)$ – непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1 - x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C^1[-1, 1]$.

Задача TF исследуется методом работы [2, с.171].

Литература

[1] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М., 1985, -304с.

[2] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK TENGLAMASINING TO'G'RI VA TESKARI MASALALARINI YECHISH

Toyirov A. X., To'rayev D. Sh., Tog'aymurotov X. E.

Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston

e-mail: akbartoyirov@gmail.com

To'g'ri qo'yilgan masala. Bizga quyidagi issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi berilgan bo'lsin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$u(l, t) = \mu_1(t) = 100t, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

(1), (2), (3), (4) larni approksimatsiyalash orqali quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \quad i=1,2,\dots,N-1, \quad (1')$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i) = 0, \quad i=0,1,\dots,N, \quad (2')$$

$$\frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = 0, \quad (3')$$

$$u_N^{j+1} = \mu_1(t_j) = 100 \cdot t_j, \quad j=0,1,\dots,M-1, \quad (4')$$

bu yerda $\tau = \frac{T}{M}$, $t_j = j \cdot \tau$, $h = 1/N$, $x_i = i \cdot h$.

(1') dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} h^2(u_i^{j+1} - u_i^j) &= a\tau(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) \Rightarrow \\ a\tau(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) - h^2(u_i^{j+1} - u_i^j) &= 0 \Rightarrow \\ a\tau u_{i+1}^{j+1} - 2a\tau u_i^{j+1} + a\tau u_{i-1}^{j+1} - h^2 u_i^{j+1} + h^2 u_i^j &= 0 \Rightarrow \\ a\tau u_{i+1}^{j+1} - (2a\tau + h^2)u_i^{j+1} + a\tau u_{i-1}^{j+1} + h^2 u_i^j &= 0 \end{aligned}$$

oxirgi ifodani h^2 ga bo'lish orqali quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{a\tau}{h^2} u_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{2a\tau}{h^2} + 1 \right) u_i^{j+1} + \frac{a\tau}{h^2} u_{i-1}^{j+1} = -u_i^j.$$

Ushbu ifoda progonka usuli ko'rinishiga keldi:

$$A = B = \frac{a\tau}{h^2}, \quad C = \frac{2a\tau}{h^2} + 1, \quad F_i = u_i^j.$$

(3') dan quyidagi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} u_0^{j+1} &= u_1^{j+1}, \\ u_0^{j+1} &= \alpha_1 u_1^{j+1} + \beta_1. \end{aligned}$$

Progonka usulining noma'lum koeffitsiyentlari quyidagicha topiladi:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \beta_1 = 0, \\ \alpha_{i+1} &= \frac{B}{C - A\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + F_i}{C - A\alpha_i}, \quad i=1,2,\dots,N-1, \\ u_i^{j+1} &= \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i=N-1,\dots,0. \end{aligned}$$

Chegaraviy teskari masala. Yuqoridagi (3) ning o'rniga quyidagi chegaraviy shartni qo'yamiz:

$$u(d, t) = z(t) = 50t, \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Progonka usulining dastlabki koeffitsiyentlari $\alpha_{d+1} = 0$, $\beta_{d+1} = z(t_{j+1})$ bo'ladi.

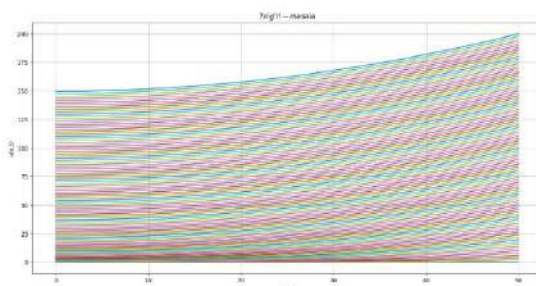
(1') dan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{h^2}{a\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) = u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} \Rightarrow$$

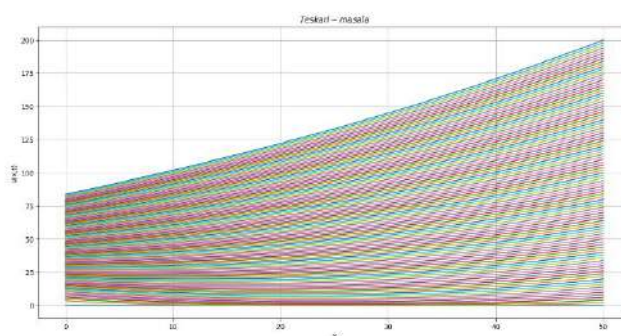
$$\frac{h^2}{\tau a}(u_i^{j+1} - u_i^j) - u_{i+1}^{j+1} + 2u_i^{j+1} = u_{i-1}^{j+1} \Rightarrow$$

$$-u_{i+1}^{j+1} + \left(2 + \frac{h^2}{\tau a}\right)u_i^{j+1} - \frac{h^2}{\tau a}u_i^j = u_{i-1}^{j+1}$$

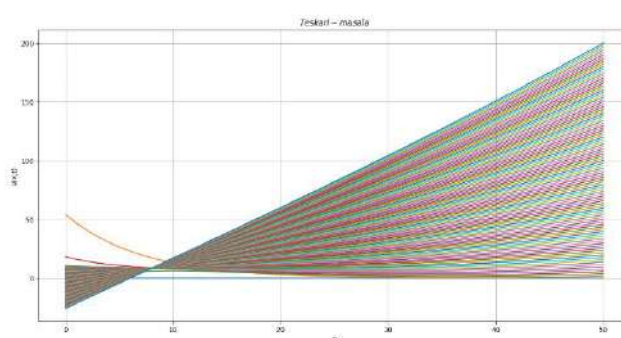
Hisoblash eksperimentidan olingan to'g'ri va teskari masalalar yechimining natijalari quyidagicha: N=50, M=100, T=2, a=1



Teskari masalaning yechimi: d=10 da



d=30 da



Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи // Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. -457 с.
- [2] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. –М.: Издательство ЛКИ, 2009. -480 с.
- [3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е. -285 с.

PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN KOEFFITSIYENTLI TESKARI MASALANI YECHISH

Toyirov A. X., To'rayev D. Sh., Norqulov F. M.

Termiz davlat universiteti, Termiz, O'zbekiston

e-mail: akbartoyirov@gmail.com

Bizga quyidagi parabolik tipdagi masala qo'yilgan bo'lsin:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1)$$

boshlang'ich shart:

$$p(x, 0) = p_0 \quad (2)$$

chegaraviy shartlar:

$$-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = v_0 = \text{const}, \quad p(L, t) = p_0, \quad (3)$$

qo'shimcha shart:

$$p(0, t) = z(t), \quad (4)$$

bu yerda $p(x, t)$ – bosim, κ – bosim o'tkazuvchanlik ko'effitsiyenti, k – g'ovak muhit o'tkazuvchanligi, μ – qovushqoqlik ko'effitsiyenti.

$$J(\kappa) = \int_0^T [p(0, t) - z(t)]^2 dt, \quad (5)$$

$$\frac{dJ(\kappa)}{d\kappa} = 2 \int_0^T [p(0, t) - z(t)] \omega(0, t) dt = 0, \quad (6)$$

bu yerda $\omega = \frac{\partial p}{\partial \kappa}$ – sezgirlik funksiyasi.

$p(x, t)$ funksiyani κ^s atrofida ikkinchi tartibli hadgacha qatorga yoyamiz:

$$p^{s+1}(x, t) = p^s(x, t) + (\kappa^{s+1} - \kappa^s) \omega^s(x, t), \quad (7)$$

$$\int_0^T [p^s(0, t) + (\kappa^{s+1} - \kappa^s) \omega^s(0, t) - z(t)] \omega^s(0, t) dt = 0;$$

$$\kappa^{s+1} = \frac{\int_0^T [\kappa^s \omega^s(0, t) - p^s(0, t) + z(t)] \omega^s(0, t) dt}{\int_0^T [\omega^s(0, t)]^2 dt}, \quad (8)$$

(1)-(3) masalani κ bo'yicha differensiallab quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\omega(x, 0) = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{k}{\mu} \frac{\partial \omega(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \omega(L, t) = 0. \quad (11)$$

κ ko'effitsiyentni topish algoritmi quyidagicha:

1. κ^0 boshlang'ich yaqinlashishni beramiz ($s = 0$);
2. (1)-(3) masalani $t = 0$ dan $t = T$ gacha yechamiz va $p(x, t)$ bosimni aniqlaymiz. (5) funksional qiymat hisoblanadi. (9)-(11) masalani $t = 0$ dan $t = T$ gacha yechamiz va $\omega(x, t)$ funksiyani aniqlaymiz;
3. (8) munosabat orqali κ^{s+1} ni hisoblaymiz;
4. Quyidagi shartlar bajarilguncha 2, 3 bosqichlarni takrorlaymiz:

$$\frac{|J^{s+1} - J^s|}{J^s} \leq \varepsilon_1, \quad \frac{|\kappa^{s+1} - \kappa^s|}{|\kappa^s|} \leq \varepsilon_2,$$

bu yerda $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – yetarlicha kichik qiymatlar.

$T = 2000 \text{ s}, \quad L = 60 \text{ m}, \quad k = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2, \quad p_0 = 10 \text{ MPa}, \quad \mu = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ MPa} \cdot \text{s}, \quad v_0 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$

$$\begin{aligned}
D &= \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}, \\
\Omega_{h\tau} &= \{(x_i, t_j), x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{L}{N}, t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau = \frac{T}{M}\}. \\
\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} &= \kappa \frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2}, i = 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, M-1. \\
p_i^0 &= p_0, i = 0, 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{k}{\mu} \frac{p_0^{j+1} - p_1^{j+1}}{h} &= v_0, p_N^{j+1} = p_0, j = 0, 1, \dots, M-1. \\
\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\tau} &= \kappa \frac{\omega_{i+1}^{j+1} - 2\omega_i^{j+1} + \omega_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \\
i &= 1, 2, \dots, N-1, j = 0, 1, \dots, M-1.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\omega_i^0 &= 0, \\
-\frac{k}{\mu} \frac{\omega_0^{j+1} - \omega_1^{j+1}}{h} &= 0, \omega_N^{j+1} = 0. \\
J &= \sum_{j=0}^{M-1} \tau (p_0^{j+1} - z^{j+1})^2,
\end{aligned} \tag{14}$$

(12) masalani progonka usuli bilan ishlash uchun quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}
Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} &= -F_i^j, \\
\text{bu yerda } A = B = \frac{\kappa\tau}{h^2}, C &= 2A + 1, F_i^j = p_i^j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0^{j+1} &= p_1^{j+1} - \frac{\mu h v_0}{k}, \\
p_0^{j+1} &= \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1, \\
\alpha_1 &= 1, \beta_1 = -\frac{\mu h v_0}{k}, \\
\alpha_{i+1} &= \frac{B}{C - A\alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + F_i^j}{C - A\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, N-1, \\
p_N^{j+1} &= p_0,
\end{aligned}$$

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, i = N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

(13) masalani progonka usuli bilan ishlash uchun quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}
A\omega_{i-1}^{j+1} - C\omega_i^{j+1} + B\omega_{i+1}^{j+1} &= -W_i^j, \\
W_i^j &= \omega_i^j + \frac{\tau}{h^2} (p_{i-1}^{j+1} - 2p_i^{j+1} + p_{i+1}^{j+1}), \\
\omega_0^{j+1} &= \omega_1^{j+1}, \\
\omega_0^{j+1} &= \alpha_1^{(1)} \omega_1^{j+1} + \beta_1^{(1)}, \\
\alpha_1^{(1)} &= 1; \beta_1^{(1)} = 0, \\
\alpha_{i+1}^{(1)} &= \frac{B}{C - A\alpha_i^{(1)}}, \beta_{i+1}^{(1)} = \frac{A\beta_i^{(1)} + W_i^j}{C - A\alpha_i^{(1)}}, i = 1, 2, \dots, N-1, \\
\omega_N^{j+1} &= 0, \\
\omega_i^{j+1} &= \alpha_{i+1}^{(1)} \omega_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^{(1)}, i = N-1, N-2, \dots, 1, 0.
\end{aligned}$$

Фойдаланилган адабиётлар

[1] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи // Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. -457 с.

[2] Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. –М.: Издательство ЛКИ, 2009. -480 с.

[3] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. Изд. 2-е. -285 с.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

¹Мамадалиев Н.А., ²Эшматова З.Б., ³Ахмаджонова Ш.А.

^{1,2}Национальный университет Узбекистан,

³Андижанский государственный университет

e-mail: m_numana59@mail.ru, ezulie@mail.ru

В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описываемая системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) + Cz(t-h) + Du(t) + Fv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h – фиксированное положительное действительное число; A, B, C – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, D, F – постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P, v(t) \in Q, 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q – непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Всюду в дальнейшем предполагаются: – измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно; – терминальное множество M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $\varphi(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. С помощью первого и третьего методов исследуются линейные игры с интегральными и различными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания. Предлагаются различные схемы получения достаточных условий для разрешимости линейной задачи преследования в системе с запаздыванием.

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h) + CK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Определение. Будем говорить, что в игре (1), (2) из начального положения $\varphi(\cdot)$, возможно завершение преследования, если существует положительное число $T = T(z_0(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, такое, что при произвольном допустимом управлении $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, убегающего можно выбрать такое допустимое управление $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, преследователя, что соответствующее решение $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, уравнение (1) с учетом начального условия $z(t) = \varphi(t)$, $-h \leq t \leq 0$, при некотором $t = t^* \in [0, T]$ попадает на множество M : т.е. верно включению $z(t^*) \in M$.

Введем следующее множество $\hat{w}(t) = \pi K(\tau - t)DP \ast \pi K(\tau - t)FQ$, $0 \leq t \leq \tau$, где $X \ast Y$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y [2].

Введем множество $W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(t)dt$. Положим

$$\Phi(\tau)\varphi(\cdot) = [K(\tau) - \pi K(\tau - h)B]\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)[B\dot{\varphi}(t) + C\varphi(t)]dt.$$

Теорема 1. Если для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, для которого $\Phi(\tau_1)\varphi(\cdot) \in W(\tau_1)$, то в игре (1) при ограничениях (2) возможно завершение преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$ за конечное время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$.

Пусть $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, – произвольное компактнозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt \subset M_1$.

Введем следующие множества

$$\hat{w}(M(t), t) = [M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)DP] * \pi K(\tau - t)FQ, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{w}(M(t), t) dt.$$

Теорема 2. Если для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует число $\tau_2 > 0$, для которого $\Phi(\tau_2)\varphi(\cdot) \in W(\tau_2)$, то в игре (1) при ограничениях (2) возможно завершение преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$ за конечное время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_2$.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 548 с.

[2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. – 230.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

¹Алишеров С.А., ²Юсупова М.Д.

¹Национальный университет Узбекистан,

²Андижанский государственный университет

e-mail: alisherovabilolbek02062019@gmail.com

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = A\dot{z}(t - h) + Bz(t - h) + Cu(t) + Dv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h – фиксированное положительное действительное число; A, B – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, C, D – постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q – непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное

подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $\varphi(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Здесь в основном посвящена методу преследования по направлению, возникшему при рассмотрении дифференциальных игр многих лиц. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования в системе нейтрального типа.

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = A\dot{K}(t-h) + BK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Пусть $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, – произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt \subset M_1$.

Введем следующие множества

$$W(t, M(t)) = [M(\tau-t) + \pi K(\tau-t)CP]_* \pi K(\tau-t)DQ, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $X *_* Y$ означает геометрическую разность (разность Минковского)

множеств X и Y [2], $W(\tau) = \int_0^\tau W(t, M(t))dt$. Положим

$$\begin{aligned} \Phi(\tau)\varphi(\cdot) &= -\pi K(\tau-h)B\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau-t-h)[A\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)]dt - \\ &- \int_0^\tau \tilde{w}(\tau-t)dt, \quad \tilde{w}(t) \in \hat{w}(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad \Psi(\tau)\varphi(\cdot) = \frac{\Phi(\tau)\varphi(\cdot)}{|\Phi(\tau)\varphi(\cdot)|}. \end{aligned}$$

Теперь для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda \Psi(\tau)\varphi(\cdot) + \pi K(\tau - t)Dv + \\ + \tilde{w}(\tau - t) \in M(t) + \pi K(\tau - t)CP\}, & \text{если } \Phi(\tau)\varphi(\cdot) \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf\{\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q\}$.

Предположение. а) Для всех $t \in [0, \tau]$ непусто множество $W(t, M(t))$; б) для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, такое, что справедливо неравенство

$$|\Phi(\tau_1)\varphi(\cdot)| \leq \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t) dt.$$

Теорема. Если выполнены все условия предположение, то в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. —М.: Наука, 1967. — 548 с.

[2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. — 230.

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Бекниязов А., Мамадалиев Н.А.

Национальный университет Узбекистан,

e-mail: bekniyazov.asan@mail.ru

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - h) + Cu(t) + Dv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h — фиксированное положительное действительное число; A, B — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, C, D — постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t)$ — называются *управлениями* преследующего и убегającego игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in U, v(t) \in V, 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где U и V — непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегającego игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Преследование начинается из начального положения $z_0(\cdot)$ и считается законченным, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M в момент времени $t = t(z_0(\cdot))$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $z_0(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования при наличии запаздывания.

Измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Пусть $X, Y \in \Omega$. Тогда множество $\{x: x + Y \subset X\}$ называется геометрической разностью (разность Минковского) множеств X и Y и обозначается $X * Y$ [2].

Пусть $\tau > 0$ – некоторое число, $t \in [0, \tau]$. $F(t): L \rightarrow L$, $t \in [0, \tau]$ – квадратная матрица размерности ν , $\nu = \dim L$, полунепрерывно сверху, зависящая от t .

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Введем следующие множества

$$P(t) = \pi K(t)CU, \quad Q(t) = \pi K(t)DV, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$\begin{aligned}\hat{w}(t) &= P(\tau - t) * F(\tau - t)Q(\tau - t) = \\ &= \bigcap_{v \in V} [P(\tau - t) - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv], \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ M_2(\tau) &= M_1 * \int_0^\tau [E - F(\tau - t)]\pi K(\tau - t)DU dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ W(\tau) &= \int_0^\tau \hat{w}(t) dt.\end{aligned}$$

Положим

$$H(\tau)z_0(\cdot) = -\pi K(\tau - h)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t) dt.$$

Предположение 1. Для дифференциальной игры (1) существует матрица $F(t)$, непрерывно зависящая от τ такая, что для всех $t \in [0, \tau]$ непусты множества $\hat{w}(t), M_2(\tau)$.

Теорема. Пусть для дифференциальной игры (1) выполнено предположение 1 и для начального положения $z_0(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, такое, что имеет место включение

$$H(\tau)z_0(\cdot) \in M_2(\tau) + \int_0^\tau \hat{w}(t) dt.$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $z_0(\cdot)$ возможно завершение преследования за конечное время $T(z_0(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Наука, 1967. — 548 с.

[2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. — 230.

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Самсоков П., Мамадалиев Н.А.

Национальный университет Узбекистана

e-mail: m_numana59@mail.ru

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = Az(t - h) + Bz(t - h) - f(u(t), v(t)), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h — фиксированное положительное действительное число; A, B — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. U и V —

компакты. Функции $u(t), v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in U, v(t) \in V, 0 \leq t < +\infty. \quad (2)$$

Измеримые функции $u = u(t), v = v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $\varphi(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Здесь в основном посвящена методу преследования по направлению, возникшему при рассмотрении дифференциальных игр многих лиц. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования в системе нейтрального типа.

Через $K(t), -\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}, t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t), 0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = A\dot{K}(t-h) + BK(t-h), t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Пусть $M(t) \subset L, 0 \leq t \leq \tau$, – произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt \subset M_1$.

Введем следующие множества

$$\hat{W}(t, M(t)) = M(\tau - t) + F(t, v), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $F(t, v) = \pi K(t) f(P, v), \pi K(t) f(P, v) = \{\pi K(t) f(u, v) : u \in P\}$.

$$W(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{W}(t, M(t)) dt.$$

Положим

$$\Phi(\tau)\varphi(\cdot) = -\pi K(\tau - h)B\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)[A\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)]dt.$$

Предположение. а) Для всех $t \in [0, \tau]$ непусто множество $\hat{W}(t, M(t))$.

Теорема. Пусть для дифференциальной игры (1) выполнено предположение 1 и для начального положения $z_0(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, такое, что имеет место включение

$$\Phi(\tau)z_0(\cdot) \in W(\tau).$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $z_0(\cdot)$ возможно завершение преследования за конечное время $T(z_0(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
 [2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. – 230.

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

¹Самсоков П., ²Рузметова Л.

¹Национальный университет Узбекистана,

²Университет точных и социальных наук,

e-mail: lobaruzmetova@gmail.com, m_numana59@mail.ru

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - h) - f(u(t), v(t)), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in V \subset \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, h – фиксированное положительное действительное число; A, B – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция. U и V – компакты. Функции $u(t), v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in U, v(t) \in V, 0 \leq t < +\infty. \quad (2)$$

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Преследование начинается из начального положения $z_0(\cdot)$ и считается законченным, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество M в момент времени $t = t(z_0(\cdot))$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $z_0(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Получено достаточное условие для разрешимости квазилинейной задачи преследования при наличии запаздывания.

Измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие геометрическим ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Пусть $X, Y \in \Omega$. Тогда множество $\{x: x + Y \subset X\}$ называется геометрической разностью (разность Минковского) множеств X и Y и обозначается $X \dot{-} Y$ [2]. Пусть $\tau > 0$ – некоторое число, $t \in [0, \tau]$.

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Введем следующие множества

$$\hat{w}(t) = \bigcap_{v \in V} F(t, v) \quad W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(t) dt,$$

где $F(t, v) = \pi K(t) f(P, v)$, $\pi K(t) f(P, v) = \{\pi K(t) f(u, v) : u \in P\}$.

Положим

$$H(\tau)z_0(\cdot) = -\pi K(\tau - h)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)]dt.$$

Предположение 1. Для дифференциальной игры (1) для всех $t \in [0, \tau]$ непусто множество $\hat{w}(t)$.

Теорема. Пусть для дифференциальной игры (1) выполнено предположение 1 и для начального положения $z_0(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, такое, что имеет место включение

$$H(\tau)z_0(\cdot) \in W(\tau).$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $z_0(\cdot)$ возможно завершение преследования за конечное время $T(z_0(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. –М.: Наука, 1967. – 548 с.

[2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. – 230.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

¹Тахиров Б.М., ²Ахмаджонова Ш.А.

¹Национальный университет Узбекистан,

²Андижанский государственный университет

e-mail: bekzodtoxirov907@gmail.com, shahzodamarufjonova361@gmail.com

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = A\dot{z}(t - h) + Bz(t - h) + Cu(t) + Dv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h – фиксированное положительное действительное число; A, B – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, C, D – постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t)$ – называются *управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P, v(t) \in Q, 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q – непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $\varphi(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Здесь в основном посвящена методу преследования по направлению, возникшему при рассмотрении дифференциальных игр многих лиц. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования в системе нейтрального типа.

Через $K(t), -\infty < t \leq \tau$, – обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}, t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t-h) + BK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Пусть $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, – произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение удовлетворяющее условию

$$\int_0^\tau M(t)dt \subset \delta M_1, \quad \delta \in [0, 1).$$

Введем следующие множества

$$W(t, M(t)) = [M(\tau-t) + \pi K(\tau-t)CP]_* \pi K(\tau-t)DQ, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $X *_* Y$ означает геометрическую разность (разность Минковского)

множеств X и Y [2], $W(\tau) = \int_0^\tau W(t, M(t))dt$, $0 \leq t \leq \tau$, $W(0) = \delta M_1$. Положим

$$\Phi(\tau)\varphi(\cdot) = -\pi K(\tau-h)B\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau-t-h)[A\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)]dt + \beta -$$

$$-\int_0^\tau \tilde{w}(\tau-t)dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad \Psi(\tau)\varphi(\cdot) = \frac{\Phi(\tau)\varphi(\cdot)}{|\Phi(\tau)\varphi(\cdot)|},$$

где $\beta \in L$ произвольный вектор из L , $\tilde{w}(t) \in W(t, M(t))$, $0 \leq t \leq \tau$, зафиксируем его. Теперь для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0: \lambda \Psi(\tau)\varphi(\cdot) + \pi K(\tau-t)Dv + \\ + \tilde{w}(\tau-t) \in M(t) + \pi K(\tau-t)CP\}, & \text{если } \Phi(\tau)\varphi(\cdot) \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf\{\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q\}$.

Предположение 1. Существуют константа $z(t)$, многозначное отображение $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq \tau$, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt \subset \delta M_1$ такие, что для всех $I(t)$, $t \in [0, \tau]$ – непусто множество $\hat{w}(M(t), t)$.

Предположение 2. а) Для начального положения $\varphi(\cdot)$ существуют число $\tau_1 > 0$, вектор $\beta \in L$ такие, что справедливо неравенство

$$1 \leq \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, \beta, t) dt;$$

б) для любого допустимого управления $B - 0 \leq t \leq \tau_1$, убегающего игрока имеет место включение

$$\int_0^{\tau_1} [E - F(\tau_1 - t)] \pi K(\tau_1 - t) Dv(t) dt \in \beta + (1 - \delta) M_1.$$

Теорема. Если выполнены условия предположения 1 и 2, то в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

[1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 548 с.

[2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. – 230.

О ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

¹Васиева Х. Г., ²Рузметова Л., ³Гафурова Х.Т.

¹Национальный университет Узбекистан,

²Университет точных и социальных наук,

³Андижанский государственный университет

e-mail: vasiyeva98@gmail.com, lobaruzmetova@gmail.com,

Динамика конфликтно-управляемого процесса в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра, описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1],

$$\dot{z}(t) = A\dot{z}(t - h) + Bz(t - h) - Cu(t) + Dv(t), \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$, $t \geq 0$; h – фиксированное положительное действительное число; A, B – постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, C, D – постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Функции $u(t)$, $v(t)$ – называются управлениями преследующего и убегающего

игроков, соответственно. Они выбираются из класса измеримых векторных функций, удовлетворяющих геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P, v(t) \in Q, \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (2)$$

где P и Q – непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми* управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено так называемое терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 – выпуклое компактное подмножество подпространства L , L – ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $(M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n)$.

Через π – обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L : $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$; под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [2].

Начальным положением для системы (1) является n – мерная абсолютно непрерывная $\varphi(t)$ функция определенная на отрезке $[-h, 0]$.

В данной работе изучается линейная задача преследования при наличии запаздывания. Здесь в основном посвящена методу преследования по направлению, возникшему при рассмотрении дифференциальных игр многих лиц. Получено достаточное условие для разрешимости линейной задачи преследования в системе нейтрального типа.

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ – нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, E – единичная матрица порядка n ; в) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = A\dot{K}(t-h) + BK(t-h), \quad t > 0. \quad (3)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

Введем следующие множества

$$\hat{w}(t) = \pi K(\tau - t)CP \ast \pi K(\tau - t)CDQ, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(t) dt,$$

где $X \ast Y$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y [2]. Положим

$$\Phi(\tau)\varphi(\cdot) = -\pi K(\tau - h)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)[A\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)]dt - \\ - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t)dt, \quad \tilde{w}(t) \in \hat{w}(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad \Psi(\tau)\varphi(\cdot) = \frac{\Phi(\tau)\varphi(\cdot)}{|\Phi(\tau)\varphi(\cdot)|}.$$

Теперь для произвольного вектора $v \in Q$ определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda \Psi(\tau)\varphi(\cdot) + \pi K(\tau - t)Dv + \\ + \tilde{w}(\tau - t) \in \pi K(\tau - t)CP\}, & \Phi(\tau)\varphi(\cdot) \neq 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf\{\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q\}$.

Предположение 1. а) Для всех $t \in [0, \tau]$ непусто множество $\hat{w}(t)$; б) для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует число $\tau_1 > 0$, такое, что справедливо неравенство

$$|\Phi(\tau_1)\varphi(\cdot)| \leq \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t)dt.$$

Теорема. Если выполнены все условия предположение, то в игре (1) при ограничениях (2) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T(\varphi(\cdot)) = \tau_1$.

Литература

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. —М.: Наука, 1967. — 548 с.
- [2] Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. - Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои, Ташкент, 2019. — 230.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ №1. АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ АЛГЕБРЫ, ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ГЕОМЕТРИИ

Abdireymov A.R. Asimptotikalıq differensiallanıwshı funkciyalar algebrası haqqında.....	9
Abdurashidov N.G’., Eshtemirov E.S. Simmetrik Leybnits algebralari va ularning xossalari	10
Allakov I., Muzropova N.S. Bir tenglamaning tub sonlardagi yechimlari haqida	12
Arzikulov F., Urinboyev F., Abdumuminov M. A characterization of automorphisms on Kislitsin algebras	14
Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Open problems on homogeneous commutative regular algebras	16
Bekbaev U., Eshmirzayev Sh. On local, 2-local automorphisms and derivations of two-dimensional algebras	18
Bozorboyev A. F., Mamadaliev O’. X. Nilradikali maksimal uzunlikdagi Kvazi-Filiform algebra bo’lgan yechiluvchan Leybnits algebrasining differensiallashlari fazosining Li strukturası	20
Ibragimova F.A. Parallelopipeddan egiluvchi sirt hosil qilish	23
Ismoilov Sh.Sh., Xolmurodova G. N. Monge-Ampere equation and theorems on the theory of surfaces in isotropic space	25
Kamalov U.P. Cirkulyant graflardagi tamirlı toğaylar sanı ushın óndiriwshi funkciyasınıń racionallıgı haqqında	27
Karimov H.K., Maxmudova D.M. Isomorphisms of commutative regular algebras	28
Karimova N. R. Finite $\forall$ -definability and computability of data models ...	29
Kurbanbaev T., Uzakbaev N. Description of solvable extensions of some Lie superalgebras	31
Normatov E.P., Bekmurodova D.B. Keli daraxtini ba’zi shartlarni qanoatlantiruvchi indeksi 4 bo’lgan normal qism gruppaga nisbatan bo’linish strukturası	34
Rahmatullaev M.M., Abdukaxorova Z.T. The weakly periodic p – adic generalized Gibbs measures for the p – adic Ising model on the Cayley tree	36
Raxmatullayev M., Karshiboev O. Sh., Ergashev A.A. Functional equations for the SOS model with competing interactions on a Cayley tree ..	38
Rozikov U.A., Toshpulatova M. 4-periodic gradient Gibbs measures of an SOS model	40

Salimova G., Sharipov A. Evklid fazosida berilgan submersiyalar geometriyasi haqida	42
Seypullaev J.X., Ongarbaev R.O. Semigroup of elements of central extensions of von Neumann algebras	44
Sultanov B.M., Axmedov I. Nochiziqli almashtirishda sirtning Gauss egriligi saqlanishi	46
Topvoldiyev F.F. Uch yoqli burchak shartli to‘la burchagini baholash	48
Yusupov B.B., Vaisova N.Z., Yusupov F.A. Local derivations of the thin Lie algebras	49
Айтмуратов А., Курбанбаев Т. Классические r – матрицы для трехмерной разрешимой алгебр Лейбница	51
Алаўатдинова У.М., Алаудинов А.К. 2-локальные внутренние дифференцирования простых алгебр Лейбница	53
Алламбергенов А. Х. Локальные и 2-локальные дифференцирования алгебры Окубо	55
Дадаходжаев Р.А. Об одной характеристизации компактных операторов относительно полуконечных вещественных алгебр фон Неймана	57
Джумамуратов Р. Т. Сравнение топологий на центральных расширениях алгебр фон Неймана	59
Жавлиев С. К. Вычислимо отделимые нумерации финитно аппроксимируемых алгебр	61
Зокиров Ф.М. Линейность йордановых $*$ –отображений на алгебрах измеримых операторов	63
Ибрагимов М. М., Тлеумуратов С. Ж. Свойства решетки геометрических трипотентов в нейтральном SFS –пространстве	65
Кеунимжаев М. К., Шарипов А. С. Об одном инварианте многогранников, изометричных по сечениям	67
Кудайбергенов К. К., Каландаров Т.С. 2-локальные автоморфизмы алгебр Аренса	69
Курбанбаев Т., Искендеров А. Почти внутренние дифференцирования нильпотентных 3-Лиевых алгебр малых размерностей	70
Курбанбаев Т., Саймбетов Р. Почти внутренние дифференцирования некоторых 5-мерных разрешимых алгебр Лейбница	72
Мамадалиев Б. М. Геометрия на двумерных плоскостях в 2R_5	74
Муминов К. К., Султонова Б. Р. Рациональный базис дифференциального поля инвариантов для группы Гейзинберга	76
Палуанов С.А., Алаудинов А.К. 2-локальные внутренние	

дифференцирования на конечномерных алгебрах Ли	78
Рахматуллаев М.М., Расулова М.А. О свободных энергиях модели Поттс-SOS на дереве Кэли	79
Танирбергенов С. А. Плоские аффинное связность на многообразии с постоянными коэффициентами Γ_{jk}^i	81
Тошматова М. М. Поверхность соприкасающихся окружностей пространственной кривой	83
Хакимов Р.М, Тожибоев Б.З. О периодических мерах Гиббса для одной НС-моделей с четырьмя состояниями на дереве Кели	84
Хатамов Н.М., Мирзаакбаров А.М. Периодические градиентные меры Гиббса для модели НС-Блюма-Капеля в случае “жезл” на дереве Кэли	86
Ходжаниязов А. Г., Кожамуратова Ш. Т. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с помощью полуобратных матриц	89
Шарипов А. С., Усмонхужаев З. Ю. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям R^4	91
Эшкobilова Д.Т. Функтор идемпотентных вероятностных мер и равномерные пространства	93
Юлдашева Н.И., Маматов М.Ш. Задача преследования и убегания на реберных остовах правильных пирамид	95

СЕКЦИЯ №2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Abdullaeva Z., Bekchanov S. Parabolik Riman sirtlarida analitik funksiyalarni yaqinlashtirish	98
Axmedov Q.Yu. m – plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning ba’zi xossalari	99
Bobojonova D.R, Boboyarova N.A. Klassik sohalarda ortonormal sistemalar	101
Bozorov J.T., Ko`charova M.N., To`rayev T.A. Ikkinchi tur matritsaviy polikrugda golomorf funksiyalar uchun Karleman formulasi	103
Dzhalilov A., Esanboeva M. On some chaotic maps	106
Dzhalilov A.A., Kakhkhorov M.J. On some symbolic dynamical systems associated by circle dynamics	108
Dzhalilov A.A., Abdusalomov H.Sh. Random piterbutions of piecewise-linear circle maps	110
Egamov D.O., Odiljonova H.A. Ground states for the mixed spin Ising	

model on a Cayley tree	112
Jalilov A. Convergence of asymptotic distributions of hitting times for critical circle maps	114
Jovliyev D.H., Rajabov M.T. Ground states for Blume-Emery-Griffiths model on a Cayley tree	116
Jurayev I.T. Dynamics of linear maps defined on a three-dimensional simplex of idempotent measures.....	118
Ko'paysinova Z.Sh., Axmedov M.M. Taqsimotlarning to'g'ri ko'paytmasi.....	120
Ko'paysinova Z.Sh., Toirov E.X. Umumlashgan funksiyalar to'g'ri ko'paytmasining ayrim tatbiqlari.....	122
Kuliyev K., Ergashev Sh. Umumlashgan hardi tengsizligi va katta sonlar qonuni.....	124
Mamirov B., Abduvohidov A. Ikki o'lchamli panjarada ikkita fermionli shredinger operatorining xos qiymatlari.....	125
Qalandarova D.A. On plurisubharmonicity and pluriharmonicity of Bsh_m	127
Rasulov K.K. Separately $\mathbb{R}$ -analytic functions	128
Safarov A.Sh. Rimanning dzeta funksiyasining kompleks nollari mavjud bo'lmagan sohaning chegarasi uchun aniqlashtirilgan baho.....	130
Safarov U.A. Absolute continuity of invariant probability measures of circle homeomorphisms with break point.....	132
Satliqov G'R., Qurbonova M.D. Chiziqli va qavariq funksiyalar uchun o'rta qiymat.....	134
Soliev X.M., Abduvaliev Yu.A., Sharipov M.A. Qator oralariga ishlov berishda o'simliklar zararlanishining ehtimoliy-statistik modeli.....	135
Xujamov J., Kadirova X. Xartogs qatori yordamida funktsiyani golomorf davom qildirish.....	138
Yusupbayeva H.E. Ellipsoidda Koshi-Fantappe integral formulasi	140
Абдикаликов Ф.А., Эрисбаев С.А., Сейтахов Р.П. Свойства оценок в специальной регрессионной модели случайного цензурирования с двух сторон	141
Абдикаликов Ф.А., Эрисбаев С.А., Насыров П.Б. Аналог неравенства Крамера-Рао для модели конкурирующих рисков	144
Аноров О.У., Шамсиддинов Н.Б. Абсолютно непрерывные квадратичные стохастические операторы	146
Данилов О.А. О разложении дискретных аналитических функций, определенных уравнением Даффина, в ряд Тейлора	147

Даужанов А.Ш., Омаров Т.М. Теоремы о кусочно–непрерывных и кусочно–гладких функциях и обобщённая производная	149
Джалилов А.А., Абдухакимов С.Х. Вероятностные инвариантные меры гладких критических отображений окружности	152
Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Λ - Сепаратно гармонические функции	154
Каримов Ж.Ж. Некоторые свойства орбит точек излома отображения окружности	156
Махаммадалиев М.Т. Крайность периодических мер Гиббса для НС-модели на дереве Кэли порядка три	157
Нарекеев Б.М., Мырзанова Д.Е. М-гармонические функции и задача Дирихле в матричном шаре	159
Неъматиллаева М. Д. Аналог теорема Вейерштрасса для $A(z)$ – аналитических функций	161
Пренов Б.Б. Каноническое представление для гармонических функции в полупространстве	163
Сапарбоева С.Ш., Эрматова Г.М. Матричные аналоги формул Бишопы в пространстве симметрических матриц	165
Умирзакова К.О. О трансляционно-инвариантной меры Гиббса для НС моделей на дереве Кэли порядка три	167
Усманов С.Э., Хазратова Г.А., Кувондилов Б.Б. Применение разрешения особенностей к максимальным операторам	170
Халкназаров А.М., Кутлымуратов Б.Ж. Многомерная граничная теорема Морера в классической области четвертого типа	172
Шарипов Р.А., Исмоилов М.Б. Свойства m -выпуклых ($m - cv$) функций	174
Шерифбоев А.Ш., Курбанов К.С., Собиров У.М. Свойства ядро Пуассона классической областей	176
Эрматова Г.М, Сапарбоева С.Ш. Свойства локального вычета в матричных областях	178
Эшниязов А.И., Хидирова Ш.Б. Множество мощности больше континуума	181

СЕКЦИЯ №3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОБРАТНЫЕ И НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ

Ashurov R.R., Fayziev Yu.E., Baxriddinova N.A. On the Cauchy problems for a fractional subdiffusion equations	184
Baltayeva U.I., Xasanov B.M. O'zgaruvchi ko'effitsiyentli yuklangan	

integral operatorli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi	185
Esomurodova R.J., Yakubov Kh.E. Exact solutions of the Harry–Dym equation with loaded by using the modified simple equation method	187
Fayziev Yu. E., Nosirova D., Maxmudova D. On the Cauchy problem for a Boussinesq type time-fractional subdiffusion equations	188
Hasanov A., Yuldashova Kh. Integral representation for hypergeometric function of the Mittag-Leffler type $\bar{F}_A^{(3)}$	189
Ibaydullayev T.T., Xusanboeva N.R., Tursunova D.T. Maxsus ko'rinishdagi integral chegaralanishli quvish va qochish masalasi	191
Irgashev B.Yu., Abduraxmonova F.Sh. Koeffitsientlari uzilishga ega bo'lgan bir tenglama uchun chegaraviy masala	193
Iskanadjiev I.M. Simplified formulas for the integral of the third method in differential games of pursuit for differential inclusions	195
Jamalov Q.N., Nurjanov O.D. Integro-differensiallik tenglemelerdin periodli sistemaları ushin ortalandiruv metodinin bir bahalawı	197
Jumaeva Sh. Carleman estimate for parabolic equation with a discontinuous diffusion coefficient	199
Karimov E., Tokmagambetov N., Khasanov Sh. Non-local time-dependent inverse source problem with unknown function on the boundary for mixed equation with the Caputo fractional derivative	200
Khasanov A.B., Ermamatova F.E. On the continuation of the solutions of a generalized Cauchy-Riemann system in bounded domain	201
Khasanov M.M., Ganjaev O.Y., Nurmetova A.A. Solitary and periodic wave solutions of the loaded burger's equation by functional variable method	202
Kuralov J.A., Davranov I. Suyuqlik harakatining differensial tenglamalar sistemasi	204
Mamadaliyev A.U. Umumlashgan kasr tartibli operator qatnashgan diffuziya tenglamasi uchun 1-chegaraviy masala	206
Murzambetova M.B. Inverse problem for mixed type equation	208
Nuriddinov J.Z., Ochilova Z.Sh. O'zgaruvchan koeffitsiyentli bir o'lchamli yadroli issiqlik tarqalish integro-differensial tenglamasi uchun teskari masala	209
Nuriddinov J.Z., Primov J.F. O'zgaruvchan koeffitsiyentli parabolik tipdagi integro-differensial tenglama yadrosining yagonaligi to'g'risida	211
Oqboyev A.B., Axmedova M.B. Ikkinchi tur buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi-Gursa masalasi	212

Oqboyev A.B., Abdusattarov O.A. Uchinchi tartibli integro-differensial tenglama uchun koshi masalasi	214
Otakulov S., Rahimov B.Sh. Conditions of controllability an ensemble of trajectories of differential inclusion	216
Qudaybergenov A.K., Qoraqulov A., Sharipova S.A. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi yechimining yagonaligi haqida	219
Qurbanbaev Ó.O. Awispali argumentke iye bazi-bir siziqli differencialliq teńlemeler	220
Rashidxon uulu Atabek. Ikkinchi tur buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun boshlang'ich shartli masala	222
Raxmonov X.B. Ona veyletni qurush	222
Samatov B.T., Turgunboeva M.A. The problem of l-approach in non-stationary geometric constraints differential game	225
Saparbayev R.A. Fractional telegraph equation with the Caputo derivative	227
Saparbayeva D.R. Exact solutions for the double sinh-Gordon equation with loaded by using (G'/G) - expansion method	228
Shakarova M. Time-dependent source identification problem for the subdiffusion equation with Caputo fractional derivative	230
Shobdarov E.B. To'rtinchi tartibli nokorrekt boshlang'ich-chegaraviy masalani shartli korrektilikka tekshirish	231
Sobirov Z.A., Turemuratova A.A. Inverse problem for heat equation with an integral over determination condition	232
Toshmatova M. M., Azizov A.N. An abstract characterization of l_2	233
Toshtemirov B. Inverse-source problem for pseudo-parabolic type equation	235
Uralova S.I. Pursuit–evasion differential games with La constraints	237
Абдуназаров Р., Абдурашидова Л.У. Алгоритм восстановления оператора Дирака по двум спектрам	239
Азамов А. А., Бекимов М. А., Дустназаров С. Б. Математическое моделирование процессов распределения и переноса тепла	242
Анарова Ш.А., Рустамов А.А. Фрактал ҳисоб-китоблар ва уларнинг тадбиқлари	243
Апаков Ю.П., Муродуллаев Д.М. Применение метода априорной оценки для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.	245
Апаков Ю.П., Муталлиев А.Ф. Первой краевой задачи для уравнения третьего порядка с младшими членами в полуполасе	247
Ашуров Р.Р., Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося	

параболического уравнения дробного порядка	250
Ашурова З. Р., Жуманов С.Ш. Интегральное представление для одного класса растущих полигармонических функций	251
Бегматов А.Х. Новые классы слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости	254
Бекиев А.Б., Отарова Ж.А. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка	256
Джамалов С. З., Сипатдинова Б.К., Мамбетсапаев К.А. Об одной линейной обратной задаче для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с полупериодической краевой условиями в неограниченном параллелепипеде	257
Елгондиев К.К., Матмуратова С.Р. Колебания мембраны, подвергающегося импульсному воздействию в фиксированные моменты времени	259
Иброхимов Х.К., Лутфиллоев Ж.М., Алохонов Х.А. Трёхмерный аналог задачи геллерстедта для уравнения смешанного парабологиперболического типа	262
Имомназаров Б.Х., Эркинова Д.А., Худайназаров Б.Б. Об одной динамической системе возникающей в двухжидкостной среде	264
Имомназаров Х.Х., Худайназаров Б.Б. Об одном неравенстве типа Пуанкаре на плоскости	266
Имомназаров Х.Х., Эркинова Д.А. Аксиальное решение системы типа Хопфа	267
Имомназаров Ш.Х., Худайназаров Б.Б. Фундаментальное решение для переопределенной системы типа Стокса	269
Иргашев Б.Ю., Пулатова С.И. Смешанная задача для вырождающегося уравнения с дробной производной Капуто	270
Ишанкулов Т., Маннонов М.А. Продолжения полианалитическая функция	273
Камалова С. Д. Смешанные задачи для дробного по времени уравнения колебания струны с производной Римана-Лиувилля	272
Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С., Кощанов А.П. Начально–граничной задачи, связанные с уравнениями колебаний балки с нелокальными граничными условиями в классах Соболева	277
Касимов Ш.Г., Реймбаева Д.К. Об однозначной разрешимости начально–граничной задачи с дробной производной Миллера–Росса, связанные с уравнениями колебаний балки, один конец которой заделан, а другой – свободной, в классах соболева в многомерном случае	279

Меражова Ш.Б. Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения параболического типа с дифференциальным оператором в общем виде	282
Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Муминов С.Ф. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа	283
Палин В.В., Айбосинова Г.М. О кусочно-постоянных решениях задачи Коши для одного семейства уравнений в частных производных первого порядка, зависящего от параметра	284
Расулов Х.Р. Об одной квадратичной динамической системе с непрерывным временем	286
Рашидов С.Г. Решение задачи Коши для одного класса параболического уравнения с вырождающимся	287
Рузиев М.Х., Адхамова Д.Т. Краевая задача для уравнения геллерстедта с сингулярным коэффициентом	288
Сатторов Э.Н., Рустамов С.У. Интегральная формула Коши для α -голоморфной функции	289
Сафаров Ж.Ш., Жураева М.М. О разрешимости одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения в прямоугольной области	292
Сафаров Ж.Ш., Хайдаров Б.Х. Об одной обратной задаче для интегро-дифференциального уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде	293
Сафаров Ж.Ш., Хасанов К.Х. О разрешимости одномерной обратной задачи для интегро-дифференциального волнового уравнения	295
Сейпуллаев Ж., Сеидуллаев А., Орынбаева Г. Интеграл геометрия мәселесиниң сынык сызықлар көплигиндеги керилениў формуласы	296
Танирбергенов М.Б., Собиров К. Формулы регуляризованных следов оператора Дирака с особенностью в потенциале	297
Танирбергенов М.Б., Собитов С. Решение начально–краевой задачи методом интегральных преобразований Фурье	300
Турсунов Ф.Р., Махмудов Ш.Т. Задача Коши для уравнения Лапласа.	302
Уразбоев Г.У., Хасанов М.М., Атаназарова Ш.Э. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза отрицательного порядка в классе периодических функций	305
Уринов А.К., Усмонов Д.А. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро-дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре	307
Файзиев А.К. Обратная задача для импульсной системы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с двумя векторами	

переопределения и смешанными максимумами	309
Фаязов К.С., Абдуллаева З.Ш. Начально-внутренняя задача для уравнения смешанного типа	311
Фаязов К.С., Худайберганов Я.К. Условная корректность начально-краевой задачи для системы неоднородных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения	313
Фаязова З.К. Задачи граничного управления для псевдопараболического уравнения с дробной производной	315
Хажиев И.О., Рuzматова Х.У. Регуляризация начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с одной линией вырождения	317
Хайдаров А., Рустамов Ш.А. Единственность и устойчивость решения обратных задач для эллиптических уравнений	319
Хайруллаев И.Н. О разрешимости однородной системы частично-интегральных уравнений специального вида	320
Хасанов А.Б., Нормуродов Х.Н., Рахматуллаева Н.Ш. Интегрирование нелинейного уравнения типа синус-Гордона с дополнительным членом в классе периодических функций	322
Хасанов Т.Г. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций	325
Хоитметов У.А. О нахождении быстроубывающих решений нагруженного уравнения синус-Гордон	328
Хоитметов У.А. О решении задачи Коши для нагруженного уравнения МКДФ-синус-Гордон с источником	330
Хоитметов У.А., Собиров Ш.К. Интегрирование нагруженного уравнения МКДФ с интегральным источником	332
Худайберганов Я.К., Ешчанова О.Р. Условная устойчивость и регуляризации начально-краевой задачи для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения	335
Шодиев Д.С., Хайруллаев М.С. О регуляризации решение задачи Коши для бигармонического уравнения на плоскости	337
Шокиров А.А., Джамалов С.З., Халмухамедов А.Р. Об одной краевой задаче с полунелокальными условиями периодического типа для трёхмерного уравнение распространение тепла в неограниченном параллелепипеде	338
Эргашева С.Б. Задача с условиями Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике для одного класса уравнений смешанного типа	340

Toyirov A. X., To'rayev D. Sh., Tog'aymurotov X. E. Kvazichiziqli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasining to'g'ri va teskari masalalarini yechish	341
Toyirov A. X., To'rayev D. Sh., Norqulov F. M. Parabolik tipdagi tenglama uchun koefitsiyentli teskari masalani yechish.....	344
Мамадалиев Н.А., Эшматова З.Б., Ахмаджонова Ш.А. Линейные дифференциальные игры преследования при геометрических ограничениях на управления игроков.....	346
Алишерова С.А., Юсупова М.Д. Об одной задаче преследования при наличии запаздывания.....	348
Бекниязов А., Мамадалиев Н.А. О задаче преследования в линейных дифференциальных играх	350
Самсоков П., Мамадалиев Н.А. Задача преследования в квазилинейной дифференциальной игре.....	352
Самсоков П., Рузметова Л. О задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх.....	354
Тахиров Б.М., Ахмаджонова Ш.А. Об одном методе преследования по направлению в линейных дифференциальных играх	356
Васиева Х. Г., Рузметова Л., Гафурова Х.Т. О задаче преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздывания	358